Solución en forma cerrada del modelo de Solow con emigración

Eduardo Macario Moctezuma Navarro[1]

Resumen

En este trabajo se relaja la hipótesis de crecimiento exponencial o maltusiano de la fuerza laboral en el modelo de crecimiento de Solow, mediante la consideración de la posibilidad de emigración. Se obtiene una solución en forma cerrada que describe la dinámica de la economía en todo tiempo, y se contrastan los resultados con el modelo original en el corto y el largo plazo. Los resultados muestran que las diferencias son dramáticas en el corto plazo, pero desaparecen en el equilibrio estacionario.

Introducción

Por lo general, los modelos de crecimiento económico hacen supuestos simples respecto a la dinámica que describe a la fuerza laboral. En concreto, se adoptan dinámicas poblacionales de corte maltusiano o incluso se postula que el tamaño poblacional permanece constante. Prácticamente, no se exploran otras dinámicas para describir la evolución de la mano de obra en los modelos de crecimiento económico. Por ejemplo, factores como la emigración no suelen ser considerados. ¿Qué es lo que se pierde y qué es lo que se gana al emplear este enfoque simplificador? Aquí se pretende responder a esta pregunta en un caso concreto: el que considera la posibilidad de que los trabajadores emigren a otro país o región; para ello, se hará uso del marco teórico propuesto por Solow. De esta manera, se estudiará un modelo más realista para analizar el efecto que la emigración tiene en el comportamiento del Producto Interno Bruto (PIB) per cápita a corto y sobretodo a largo

[1] Profesor Interino en el Departamento de Métodos Cuantitativos de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional.

plazo. Cabe señalar que el propio Solow (1956) ensayó en su artículo pionero, una dinámica poblacional variable *ad hoc*, para destacar la posibilidad de escenarios alternos al estado estacionario no trivial, único y estable, que es la norma al día de hoy. Aunque Solow no tuvo la intención de generalizar su modelo o hacerlo más realista, la modificación de la hipótesis de comportamiento maltusiano en la dinámica laboral, daba lugar a un resultado inesperado: la presencia de dos puntos de equilibrio en lugar de uno solo, con características de estabilidad dinámica contrapuestas[2].

Por otro lado, el tratamiento clásico de la migración[3] ha sido el desarrollado por J. Harris y M. Todaro (1970), quienes encontraron que la causa fundamental de la migración del campo a la ciudad no son las diferencias salariales sino las diferencias en el ingreso esperado; sólo que dicho estudio estaba dirigido más bien a la migración del sector rural al sector urbano, no estaba enfocado en ampliar el modelo de crecimiento de Solow como se está considerando en este artículo.

En el trabajo de P. Robertson y S. Wellisz (1977) puede encontrarse la extensión quizá más sencilla posible de la dinámica laboral mediante la incorporación de un término de migración laboral, en el marco de un modelo neoclásico de dos sectores: uno agrícola y otro urbano:

$$\dot{L}_a = n_a L_a - M$$

$$\dot{L}_u = n_u L_u + M$$

Donde M es el número de migrantes de un sector a otro, n_i es la tasa de crecimiento natural y los subíndices a y u, indican el sector co-

[2] En realidad, fue Haavelmo (1956) quien previamente ensayó una amplia variedad de posibilidades en la modelación de la dinámica del ingreso, capital y mano de obra. Su trabajo sirvió de base al modelo de Solow, pero carecía de un marco conceptual firme y suele considerarse como un ejercicio exploratorio de las posibilidades de modelación, más que el desarrollo de teorías concretas.

[3] Por migración se hace referencia a dos situaciones posibles: la de emigración, que implica la salida de connacionales al exterior; y la inmigración, que se refiere a la llegada de extranjeros para integrarse a la mano de obra del país. En este trabajo, se aborda únicamente la emigración, E, pero el tratamiento matemático que incluye a los inmigrantes, es el mismo que el desarrollado aquí (bastaría con cambiar $M=E-I$ en lugar de E, donde M e I indican: número de migrantes e inmigrantes, respectivamente).

rrespondiente (agrícola o urbano, respectivamente). El objetivo de dicho trabajo estaba dirigido al análisis de la brecha salarial existente entre sectores, y en el desarrollo del mismo no fue necesario determinar explícitamente el estado estacionario de la economía, más bien éste se analizó de forma gráfica. De manera que, aunque se realizó un relajamiento de la hipótesis de crecimiento laboral maltusiano mediante la consideración de migración, este tema no era el punto central de la investigación y no se obtuvieron trayectorias temporales completas ni una expresión explícita del estado de equilibrio.

Un comentario especial merece la presentación que R. Barro y X. Sala-i-Martin (2003) hacen sobre el impacto de la migración. En realidad, estos autores presentan una investigación anterior debida a J. Braun (1993), en la que se analizan los efectos migratorios pero considerando fundamentalmente que la migración también implica la movilidad de capital humano, siendo esta movilidad de capital más relevante en el análisis. En éste artículo no se está en desacuerdo con ensayar esta aproximación; sin embargo, dicha línea de investigación se aparta de lo que es nuestro punto de interés: las implicaciones de la elección del comportamiento laboral en el modelo de Solow, sin efectos asociados como la movilidad o no de algunas formas de capital.

Una reciente aportación en la línea de investigación que sí se está considerando es el trabajo de P. Pieretti y B. Zou (2007), quienes realizaron una extensión a la versión solowiana del crecimiento, mediante el análisis de una fuerza laboral agregada en la que se permite la emigración. Estos autores exploraron el papel que juega la elasticidad de sustitución entre mano de obra calificada y no calificada, como determinante de las “fugas de cerebros” y su impacto en el crecimiento económico del país de origen. En concreto, Pieretti y Zou consideraron una población consistente de trabajadores no calificados, N (con tasa de crecimiento exógena $n_N \geq 0$, y que no emigran), y de trabajadores calificados, R (con potencial de emigrar). Los autores denotan por E el flujo de emigración. La tasa natural de crecimiento de la mano de obra calificada está dada de forma exógena por n_R. La dinámica de la mano de obra calificada se expresa como sigue: $\dot{R} = n_R R - E$, por lo que la tasa de crecimiento de la fuerza laboral calificada está dada por:

$$\frac{\dot{R}}{R}=n_R-\frac{E}{R}$$

Además, se asume que la fuerza laboral combinada está gobernada por la siguiente función tipo CES: $L=[bR^{-\beta}+(1-b)N^{-\beta}]^{-\frac{1}{\beta}}$, con $-1<\beta<\infty$, donde β es el parámetro de sustitución. Pieretti y Zou encuentran que hay formas de evadir la estabilidad asintótica típica del modelo de Solow y ello depende del grado de sustitución entre las formas de trabajo, por consiguiente los patrones temporales del ingreso per cápita varían al experimentar "fuga de cerebros"[4]. Tanto esta investigación como la desarrollada por Robertson y Wellisz son antecedentes directos del trabajo que se realiza en este artículo.

El marco teórico de Solow

Sea $Y=Y(t)$ el ingreso o producción agregados, $K=K(t)$ es el stock de capital, $C=C(t)$ es el consumo e $I=I(t)$ es la inversión bruta. Se supone que todo el ingreso se dedica al consumo o al ahorro (y que el ahorro es igual a la inversión)[5]:

$$Y(t)=C(t)+I(t) \tag{1}$$

Se supone también que la variación del stock de capital $K(t)$ es igual a la inversión bruta menos la depreciación del capital:

$$\dot{K}(t)=I(t)-\delta K(t) \tag{2}$$

Se denota a $L=L(t)$ como la fuerza de trabajo o mano de obra, y se asume que crece a una tasa constante $a>0$. Así, establecemos su tasa de crecimiento como:

$$n(t)=\frac{\dot{L}}{L}=a \tag{3}$$

---

[4] Aunque cabe señalar que no es modelada la emigración por parte de los trabajadores no calificados.

[5] Simplemente se trata de la condición de equilibrio del mercado de bienes. Solow toma la ecuación (1) de la macroeconomía básica, pero dicha expresión también puede obtenerse a partir de microfundamentos.

Sea $Y=F(K,L)$ una función de producción neoclásica. Si $k=K/L$, $y=Y/L$, y $c=C/L$ son el capital, el ingreso, y el consumo per cápita, se tiene que[6]:

$$\frac{Y(t)}{L(t)}=\frac{C(t)}{L(t)}+\frac{\dot{K}(t)}{L(t)}+\frac{\delta K(t)}{L(t)} \tag{4}$$

es decir:

$$y(t)=f(k(t))=c(t)+\frac{\dot{K}(t)}{L(t)}+\delta k(t) \tag{5}$$

Por (1), se sabe que: $y(t)-c(t)=sy(t)$, donde $0<s<1$. Por otro lado, nótese el vínculo entre las tasas de crecimiento[7]:

$$\dot{k}=\frac{\dot{K}}{L}-k\left(\frac{\dot{L}}{L}\right) \tag{6}$$

De esta forma, si se sustituye (6) en (5), se tiene:

$$\dot{k}=sf(k)-[\,n(t)+\delta\,]\,k \tag{7}$$

$$\dot{k}=sf(k)-(a+\delta)k \tag{8}$$

Esta es la ecuación fundamental del modelo de Solow, con la cual se está en posición de hacer las preguntas importantes; por ejemplo, ¿cómo evoluciona en una economía el PIB per cápita, $y=f(k)$?

Para responder esa pregunta se utiliza la Figura 1, en la cual hay dos curvas: la primera representa la inversión realizada por trabajador, $sf(k)$; la segunda curva indica la inversión de reposición, i.e. la inversión requerida para mantener constante el capital k[8]. La diferencia entre estas dos curvas indica la variación en $k=K/L$. Considere una economía que inicia en $k_0<k^*$. Debido a que en k_0 se tiene $sf(k)>(a+\delta)k \Rightarrow \dot{k}>0$ hasta que $k=k^*$, y en la coordenada k^* se verifica: $sf(k)=(a+\delta)k \Rightarrow \dot{k}=0$,

[6] Al término $k=K/L$ también se le interpreta como el grado de industrialización o de mecanización de la economía.

[7] Obtenido a partir de la aplicación de propiedades logarítmicas en $k=K/L$ y la posterior derivación con respecto al tiempo, más un despeje adicional.

[8] A las curvas de inversión realizada y de inversión de reposición, también se les suele identificar como curva de ahorro y curva de depreciación ampliada, respectivamente.

es decir, el capital por trabajador permanece constante. Este punto k^* es el denominado estado estacionario. Análogamente, si $k_0 > k^* \Rightarrow \dot{k} < 0$ hasta que $k = k^*$. Así, el diagrama de Solow muestra el valor en estado estacionario del capital por trabajador, k^*, a partir del cual se derivan las demás variables del modelo $f(k^*) = y^*, sy^*, (1-s)y^* = c^*$[9]:

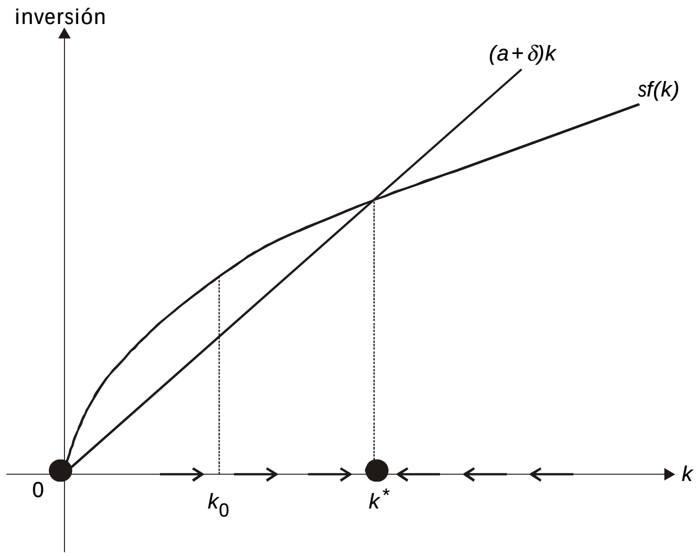

Figura 1. Diagrama de Solow

La dinámica maltusiana

Si empleamos una función de producción específica, por ejemplo la de Cobb-Douglas $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ tal que $y = k^{\alpha}$, y hacemos uso del factor de Bernoulli para linealizar la ecuación fundamental de Solow, ecuación (8), entonces podemos obtener una solución cerrada para el capital y por ende para la producción per cápita:

$$y(t) = \left[\frac{s}{a+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{a+\delta} \right) e^{-(1-\alpha)(a+\delta)t} \right]^{\frac{a}{1-\alpha}} \qquad (9)$$

---

[9] Para detalles adicionales sobre este modelo se sugiere la lectura del capítulo uno de Barro y Sala-i-Martin (2003).

Que en el largo plazo, origina la siguiente expresión de estado estacionario:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y^* = \left[\frac{s}{a+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{10}$$

Luego, podemos utilizar estos resultados (ecuaciones (9) y (10)) para su comparación con otras tasas de evolución laboral. Para empezar, recordemos los seis supuestos en los que se basa el modelo maltusiano de crecimiento poblacional:

1. El espacio es ilimitado (no hay restricciones en el espacio que ocupa la población).
2. Los recursos son ilimitados (es decir, se asume la ausencia de restricciones en alimentos, fuentes de energía, etc.).
3. El medio es homogéneo (los recursos están distribuidos de manera homogénea).
4. La población está aislada (en el sentido de que no hay depredadores ni tampoco parásitos).
5. La población está cerrada (no hay emigración ni tampoco inmigración).
6. La población es homogénea (los individuos son indistinguibles entre sí).

De manera que las consecuencias del modelo de Malthus, sólo son aceptables si se cumplen las premisas anteriores. El problema es que es muy difícil encontrar en la realidad ejemplos que verifiquen los supuestos anteriores (quizá las bacterias en un vaso de Petri y eso durante un lapso breve nada más). Por mucho, la población humana no verifica el escenario maltusiano, de manera que se vuelve necesario un modelo de crecimiento económico que incorpore una dinámica poblacional más apropiada para describir la población humana y por ende la laboral, pues se asume que la segunda es una fracción de la primera y hereda su dinámica.

De esta forma, si se relajan algunos supuestos (uno por cada vez) se obtienen diferentes dinámicas poblacionales, que de hecho pueden ser más complejas pero también más realistas, en particular para poblaciones humanas. A continuación se hace un esfuerzo en esta dirección.

Crecimiento exponencial con emigración

Si se relaja el quinto supuesto, es decir si se plantea ¿qué pasa cuando se toma en cuenta la migración laboral que sufre la economía, de manera que la trayectoria temporal de la mano de obra está regida por (11) y ya no por (3)? donde:

$$\dot{L}=aL-E \Rightarrow n(t)=\frac{\dot{L}}{L}=a-\frac{E}{L} \tag{11}$$

y a, $E > 0$ tal que E es el parámetro que representa la emigración, por ejemplo el flujo migratorio de mexicanos a Estados Unidos de América (si dicho flujo es constante). Sustituyendo la dinámica demográfica (11) en la ecuación (7), y usando $y=k^{\alpha}$, se obtiene una expresión más complicada para la producción a corto plazo:

$$y(t)=\left[\frac{1}{\left[\left(\frac{L_0a}{E}-1\right)+e^{-at}\right]}\left\{\frac{se^{-at}}{\delta}+\frac{s\left(\frac{L_0a}{E}-1\right)}{\delta+a}+\left[\left(\frac{L_0a}{E}\right)k_0^{1-\alpha}-\frac{s}{\delta}-\frac{s\left(\frac{L_0a}{E}-1\right)}{\delta+a}\right]e^{-(\delta+a)t}\right\}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Pese a ello, en el largo plazo, los perfiles estacionarios guardan una relativa similitud, pues[10]

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=y^*=\begin{cases}\left(\dfrac{s}{\delta+a}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, si\ L_0\neq E/a\\[2ex]\left(\dfrac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, si\ L_0=E/a\end{cases} \tag{12}$$

Con lo cual, se puede concluir que aún cuando a corto plazo sí existen diferencias entre el modelo de Solow cuando la población tiene o no en consideración a la emigración, tales diferencias desaparecen en el largo plazo, pues ambos modelos convergen a estados estacionarios similares. Ilustramos estos resultados en las Figuras 2 y 3 (en las simula-

[10] En (12) se incluyó el caso $L_0=E/a$ sólo para cubrir todos los escenarios posibles, pero en realidad dicha situación corresponde a una población constante, por lo que su importancia es secundaria para nuestro objetivo.

ciones correspondientes se han utilizado: $\alpha=0.4$, $s=0.16$, $a=0.02$, $\delta=0.04$, $k_0=1$, $L(0)=L_0=20$).

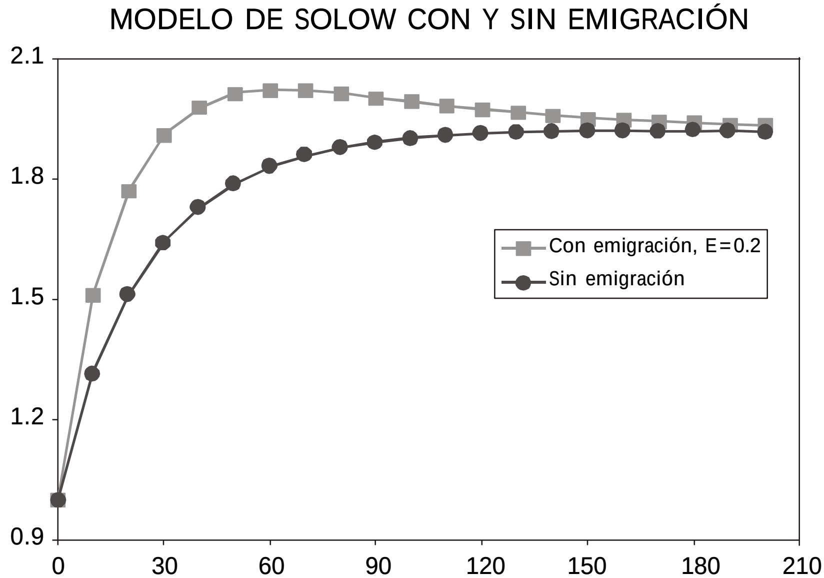

Figura 2. Contraste inicial entre el modelo de Solow original y el modelo con emigración.

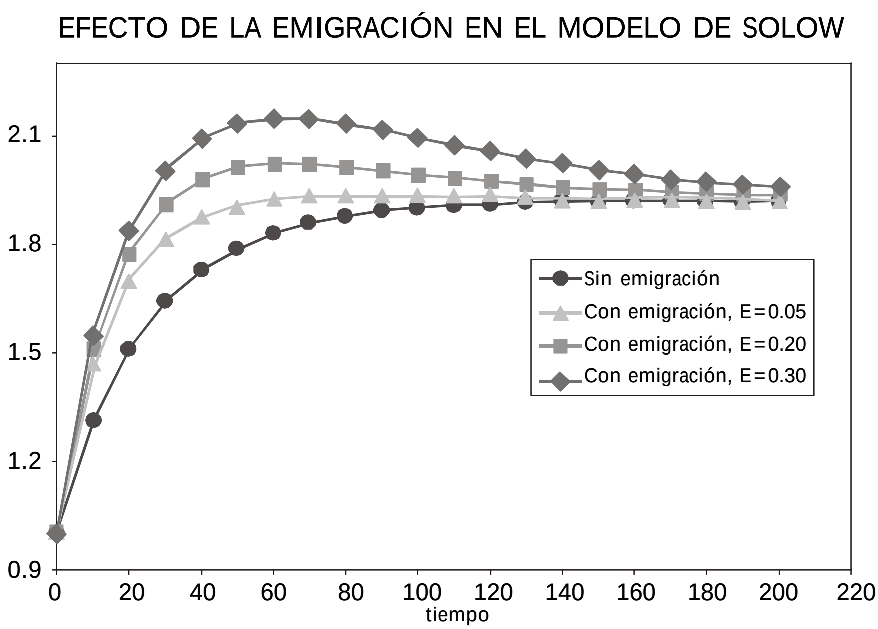

Figura 3. La emigración afecta el corto plazo, pero no al estado estacionario de la economía.

Un aspecto adicional a destacar, es el hecho de que en la medida que la emigración se incrementa, en el corto plazo pueden alcanzarse niveles mayores de PIB per cápita respecto a los del estado estacionario; sin embargo, aún en esos casos dicho efecto no es permanente y el PIB per cápita converge a su valor de equilibrio, como se muestra en la Figura 3. Por supuesto, no es una buena idea pensar en la emigración como un mecanismo para alcanzar valores mayores en el PIB per cápita, aunque sea por un plazo corto de tiempo; y la razón es simple: la población puede soportar ciertas tasas de emigración pero no cualquier tasa, en concreto, para que la población sea nula basta con que $L_0 < E/a$ y transcurran.

$$t = \frac{1}{a} \, 1n\left(\frac{E}{E - aL_0}\right) \tag{13}$$

Medido en años o periodos de tiempo. Así, el aumento discriminado del parámetro *E* conduce en determinado momento a la desaparición de la mano de obra; luego, por el supuesto de esencialidad de los factores, no habrá producción si uno (o ambos) de los factores productivos (capital o trabajo) es nulo; por tanto, si se propicia que la emigración sea alta para alcanzar un mayor PIB per cápita, puede presentarse un escenario contraproducente en el que la población desaparece y no habrá producción en la economía.

Conclusiones

Por mucho tiempo, un patrón maltusiano en la dinámica poblacional laboral, ha sido piedra angular en las teorías del crecimiento económico. Por lo general, se evita la incorporación de modelos poblacionales más complejos pero también más realistas. En este trabajo se ha obtenido la trayectoria temporal completa de una economía a la Solow con emigración y se ha contrastado con el modelo original maltusiano, con la intención de avanzar en la incorporación de modelos demográficos más apropiados para las sociedades humanas.

Lo que se muestra en este trabajo, es que al elevar la complejidad de la dinámica poblacional vía la introducción de un supuesto más realista como la emigración, se obtienen resultados marcadamente diferentes en la trayectoria a corto plazo de la economía, pero también se muestra que las diferencias desaparecen en el largo plazo. Esto es, aunque en un sentido estricto la mecánica del crecimiento económico es distinta, sigue siendo muy parecida a la versión sin emigración, sobretodo en el largo plazo.

Bibliografía

Barro, R. J.; Sala-i-Martin, X. (2003). *Economic Growth*, MIT Press; 2nd Edition, pp. 23-34, 43, 44.

Braun, J. (1993). *Essays on Economic Growth and Migration*, Ph.D. dissertation, Harvard University.

Haavelmo, T. (1956). *A Study in the Theory of Economic Evolution*, North Holland Publishers, 1st edition (2nd printing), pp. 25-44.

Harris, J., Todaro, M. (1970). “Migration, Unemployment and Development: A Two-Sector Analysis”, *American Economic Review*, Vol. 60, N. 1, pp. 126-142.

Malthus, T. R. (1951). *Ensayo sobre el principio de la población*, Fondo de Cultura Económica.

Moctezuma-Navarro, E. M. (2007). “Sobre el Efecto de Dinámicas Poblacionales No Estándar en el Crecimiento Económico a la Solow”, *XII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas*, ESFM-IPN.

Moctezuma-Navarro, E. M. (2008). “Sobre la Relajación de la Dinámica Maltusiana en el Crecimiento Económico a la Solow”, *XIII Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas*, ESFM-IPN.

Moctezuma-Navarro, E. M. (2010). “Sobre el Efecto de la Dinámica Laboral, la Tecnología y la Economía Informal en el Crecimiento Económico”, *Tesis de Maestría en Matemáticas Aplicadas e Industriales*, UAM-Iztapalapa.

Pieretti, P., Zou, B. (2007). “An Extended Solow Growth Model with Emigration: Transitional Dynamics and Skills Complementarity”, *Economics Bulletin*, Vol. 6, N. 35, pp. 1-11.

Robertson, P.; Wellisz, S. (1977). “Steady-State Growth of an Economy with Intersectoral Migration”, *Oxford Economic Papers*, Vol. 29 N. 3, pp. 370-388.

Solow, R. M. (1956). “A Contribution to the Theory of Economic Growth”, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, pp. 65-94.

Sydsaeter, K.; Strom, A.; Berck, P. (2005). *Economist's Mathematical Manual*, Springer-Verlag, 4th Edition, pp. 69-72.