denarius
revista de economía y administración

Inmunización de flujos financieros con derivados de tasas de interés: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Hull y White

Claudia Estrella Castillo Ramírez [1]
Francisco Venegas Martínez [2]
Cesar Contreras Piedragil [3]

Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo de inmunización de flujos financieros, pasivos y activos, contra el riesgo de tasa de interés mediante el uso de contratos a futuros sobre CETES (títulos de deuda pública del gobierno Mexicano). Las estrategias de cobertura que se derivan del modelo propuesto conducen a una reducción significativa del riesgo de mercado. Los conceptos de duración y convexidad monetaria desempeñan un papel importante en el desarrollo del modelo en cuanto a la medición y el control del riesgo. Específicamente, se controla el riesgo de desplazamientos paralelos y moderados en la estructura temporal de la tasa de interés. La robustez de las estrategias obtenidas se evalúa con la metodología de valor en riesgo. A manera de ilustración, el modelo desarrollado es aplicado en la cobertura de un conjunto de flujos financieros.

1. Introducción

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de futuros financieros se debe en gran medida a la flexibilidad que estos instru-

[1] Universidad Autónoma Metropolitana–Unidad Azcapotzalco.

[2] Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional.

[3] Escuela de Economía. Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca.

mentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente de sus posiciones en el mercado. Esto gracias a su liquidez y al bajo nivel de apalancamiento que requieren.

Los futuros financieros, en particular los que se refieren a títulos de deuda pública, son herramientas útiles que permiten a las tesorerías de corporativos controlar el riesgo de tasa de interés con costos bajos de transacción. El riesgo crédito de estos instrumentos es nulo debido a la asociación del mercado con una cámara de compensación que, a cambio de una comisión, actúa como contraparte de todas las partes, garantizando el cumplimiento de las obligaciones adquiridas por los participantes. De esta manera, los futuros financieros son instrumentos que permiten a las tesorerías planear sus flujos de pasivos y activos en respuesta a sus expectativas económicas y financieras, reduciendo el riesgo y la incertidumbre del mercado con bajos costos de transacción.

El riesgo por fluctuaciones adversas en la tasa de interés que enfrentan las tesorerías de corporativos, se refleja en la posibilidad de que los flujos que se tienen planeados no se presenten ni en la magnitud ni en los tiempos que se esperaban. El riesgo de tasas de interés puede reducirse, y en ocasiones eliminarse, si se cubren adecuadamente los flujos esperados tomando posiciones en futuros sobre títulos de deuda gubernamentales. En este trabajo, con base en la distribución empírica del valor presente de los flujos financieros, se da respuesta a las siguientes preguntas: ¿cómo se puede medir el riesgo asociado a diferentes escenarios o estados de la naturaleza y cómo inmunizar contra este tipo de riesgo el valor presente de los flujos esperados?

La inmunización de un conjunto de flujos esperados consiste en determinar un portafolio de futuros que genere los flujos de efectivo que se requiere para compensar las pérdidas en el valor presente, es decir, se desea determinar un portafolio que cubra el valor presente de los flujos esperados contra el riesgo de tasas de interés.

En este trabajo de investigación, las estrategias de inmunización se determinan con base en los conceptos de duración y convexidad monetarias del valor presente de los flujos y de los contratos futuros. Para evaluar la robustez de las estrategias de cobertura planteadas en términos globales y del comportamiento histórico de la tasa de interés, se genera la distribución conjunta del valor presente de los flujos financieros y de los flujos propios que producen los futuros y, posteriormente, se comparan las varianzas de las distribuciones empíricas de los flujos financieros con y sin futuros, y se estiman pérdidas potenciales en términos del valor en riesgo.

La literatura disponible sobre inmunización utilizando los conceptos de duración y convexidad es extensa. Vale la pena destacar los trabajos de: Islas-Camargo y Venegas-Martínez (2003), Venegas-Martínez (2001), (2002), (2003a) y (2003b), Venegas-Martínez y González-Aréchiga (2002), Venegas-Martínez *et al*. (2002), Kolb (1998), Zenios (1996); Fabozzi (1994), Chance (1990), Cox, Ingersoll y Ross (1979), Platt (1986), Schaefer (1986); Chua (1984), Ingersoll, Skelton y Weil (1978), Bierwarg, Kaufman y Khang (1978), Bierwarg, Kaufman y Toevs (1983a,b), Fabozzi y Pollack (1987), Granito (1984). La literatura sobre valor en riesgo es también abundante, así que sólo mencionamos algunos ejemplos: Jorion (1999), Beckstrom y Campbell (1995) y Kupiec (1995).

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se presenta un método local de inmunización de flujos financieros que utiliza duración y convexidad monetarias. En la sección 3 se desarrolla un método global de inmunización con base en el valor en riesgo. En la sección 4 se ilustra el método de inmunización propuesto en la cobertura financiera de un conjunto de flujos. Por último, en la sección 5 se resumen los principales resultados de la investigación, se destacan las limitaciones y ventajas del método empleado y se mencionan algunas líneas de investigación futura.

2. Método local de inmunización de flujos financieros

En esta sección se presenta un modelo de decisión para inmunizar flujos financieros con futuros sobre tasas de interés. El modelo emplea los conceptos de duración y convexidad monetaria útiles en la medición y el control del riesgo por desplazamientos paralelos y moderados en la tasa de interés. A partir de las estructuras de plazos de la tasa de interés de CETES, generadas con el modelo de Hull y White (1990), se obtienen las distribuciones empíricas de un conjunto de flujos financieros con y sin inmunización, y se comparan los efectos en la varianza y en el valor en riesgo a niveles predeterminados de probabilidad.

2.1 Estimación de la curva de rendimiento de CETES con el modelo de Hull y White.

Para comenzar a describir de la estimación de la curva de rendimiento de CETES con el modelo de Hull y White, podríamos decir que, existen modelos como el de Ho y Lee (1986) que se pueden calibrar; el caso de Ho y Lee es el más fácil. La mayoría de los modelos con un factor de incertidumbre, con un solo movimiento Browniano, permiten calibrar la curva de rendimiento con los precios de mercado actuales. Si el modelo no es del todo tratable, es decir, el modelo no proporciona una fórmula explícita para los precios de los bonos cupón cero, entonces se recurre a los métodos numéricos a fin de encontrar soluciones aproximadas. La característica común entre los modelos[4] Hull y White (1990) y Ho y Lee (1986) es que la curva de rendimiento calibrada depende de la pendiente de la tasa forward. Y su principal diferencia consiste en que el Hull y White modelan los ciclos económicos que siguen las tasas de interés utilizando un factor de retorno a la media de largo plazo de las tasa de interés.

En el modelo de Vasicek la dinámica de la tasa corta, r_t, es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad (1)$$

Donde a es la velocidad de ajuste al valor de largo plazo b, σ es la volatilidad y W_t es un movimiento geométrico Browniano, es decir, W_t tiene una distribución normal con media 0 y varianza t. Hull y White (1990) extienden este modelo para incluir un parámetro dependiente del tiempo, específicamente se supone que b es dependiente del tiempo, lo cual se denotará mediante b_t, de esta manera

$$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad (2)$$

Si se supone que a y σ han sido estimadas por algún método estadístico, se desea ahora seleccionar $b_t^{(0)}$, en el tiempo $t=0$, de tal manera que los precios de mercado y los teóricos coincidan.

---

[4] Otro modelo disponible en la literatura es el Nelson y Siegel (1987).

2.2 Tasa corta neutral al riesgo.

Se supone que el precio de bono cupón cero, $B=B(t,T)$, satisface la ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal y parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^{\,2}}+a(b_t-r_t)\frac{\partial B}{\partial r_t}-r_tB=0, \tag{3}$$

Con la condición de final $B(T,T)$. Dado que la ecuación anterior no tiene derivadas parciales cruzadas, se supone una solución de variables separables de la forma:

$$B(t,T)=e^{A(t,T)-rtD(t,T)} \tag{4}$$

Claramente, en este caso, se cumple que $A(T,t)=0$ y $D(T,T)=0$, ya que el valor nominal del bono en el tiempo T, está dado por $B(t,T)$. Al diferenciar en (4) se sigue que:

$$\frac{\partial B}{\partial t}=\left(\frac{\partial A}{\partial t}-r_t\frac{\partial D}{\partial t}\right)B,$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t}=-DB,$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2}=D^2B.$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (3), se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t}-r_t\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2D^2-a(b_t-r_t)D-r_t=0, \tag{5}$$

Dado que A y D son funciones de t y T, si se deriva (5) con respecto a r_t se obtiene

$$\frac{\partial D}{\partial t}=aD-1 \tag{6}$$

La solución de la ecuación diferencial anterior con condición final $D(T,T)=0$ está dada por

$$D(t,T)=D(T,T)e^{-a(T-t)}-e^{-a(T-t)}\int_T^t e^{a(T-s)}ds$$

$$= -e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \tag{7}$$

$$= \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Por lo tanto, al sustituir $D(t,T)$ en (5) se obtiene

$$0 = \frac{\partial A}{\partial t} - r_t(aD-1) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + a(r_t - bt)D - r_t$$

O bien,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b_t(1-e^{-a(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-a(T-t)})^2$$

En consecuencia,

$$A(t,T) = \int_T^t b_s(1-e^{-a(T-s)})ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t-T)$$

$$+ \frac{\sigma^2}{a^2}\int_T^t e^{-a(T-s)}ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_T^t e^{-2a(T-s)}ds$$

$$= -\int_t^T b_t(1-e^{-a(T-s)})ds$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(T-t+\frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right). \tag{8}$$

Si se supone que a y σ han sido estimados por algún método de inferencia estadística y se desea calibrar $A(0,T)$ con la curva de rendimiento actual, es decir, se desea encontrar $b_T^{(0)}$ tal que

$$A(0,T) = -\int_0^T bs^{(0)}(1-e^{-a(T-s)})ds + \left(\frac{\sigma^2}{2a^2}T + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} - \frac{3}{2a}\right).$$

Equivalentemente,

$$-\int_0^T b_s^{(0)}(1-e^{-a(T-s)})ds + \left(\frac{\sigma^2}{2a^2}T + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} - \frac{3}{2a}\right).$$

$$= \ln B(0,T) + r_0 D(0,T) \tag{9}$$

$$= lnB(0,T) + r_0\left(\frac{1-e^{-aT}}{a}\right),$$

La cual es una ecuación integral en $b_t^{(0)}$. Una forma de resolver esta ecuación integral es calculando sus dos primeras derivadas. Para derivar (9) con respecto de T, denote el integrando de (9), por un momento, como

$$g(T,s) = b_s^{(0)}(1-e^{-a(T-s)}).$$

En este caso, la regla de Leibnitz conduce a

$$\frac{\partial}{\partial T}\int_0^T g(T,s)ds = \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} g(T,s)ds + g(T,T)\frac{\partial T}{\partial T} - g(T,0)\frac{\partial 0}{\partial T} = a\int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)}ds.$$

Por lo tanto, la derivada de (9) está dada por:

$$-a\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-S)}ds + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-2e^{-aT}+e^{-aT}) = \frac{\partial}{\partial T} lnB(0,T) + r_0 a e^{-aT} \quad (10)$$

Equivalentemente,

$$\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}ds = \frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-aT})^2 - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial T}1nB(0,T) - r_0 e^{-aT}. \quad (11)$$

Con el propósito de derivar nuevamente (10) con respecto de T, se define ahora

$$G(T,s) = b_s^{(0)}e^{-a(T-s)},$$

Y en este caso la regla de Leibnitz conduce a la expresión

$$\frac{\partial}{\partial T}\int_0^T G(T,s)ds = \int_0^T \frac{\partial}{\partial T}G(T,s)ds + G(T,T)\frac{\partial T}{\partial T} - G(T,0)\frac{\partial 0}{\partial T} = -a\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}ds + b_T^{(0)}$$

En consecuencia,

$$a^2\int_0^T b_s^{(0)}e^{-a(T-s)}ds - ab_T^{(0)} + \frac{\sigma^2}{a}(1-e^{-aT})e^{-aT} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} lnB(0,T) - r_0 a^2 e^{-aT}. \quad (12)$$

Después de igualar (11) con (12) se cumple que

$$b_T^{(0)} - \frac{\sigma^2}{a^2}(1-e^{-aT})e^{-aT} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln B(0,T) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-aT})^2 - \frac{\partial}{\partial T}\ln B(0,T), \quad (13)$$

lo cual implica que

$$b_T^{(0)} = -\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln B(0,T) - \frac{\partial}{\partial T}\ln B(0,T) + \frac{\sigma^2}{a^2}(1-e^{-aT}) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-aT})^2$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial T}f(0,T) + f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-2aT}) \quad (14)$$

Para encontrar $A(t,T)$ a partir de (8), se escribe (14) empleando t en lugar de T, es decir,

$$b_t^{(0)} = -\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ln B(0,t) - \frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-2at}).$$

Por lo anterior se satisface que

$$\int_t^T b_s^{(0)}(1-e^{-a(T-s)})ds$$

$$= \int_t^T \left(-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln B(0,s) - \frac{\partial}{\partial s}1nB(0,s) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-2as})\right)(1-e^{-a(T-s)})ds$$

$$= -\frac{1}{a}\int_t^T (1-e^{-a(T-s)})\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln B(0,s)ds - \int_t^T (1-e^{-a(T-s)})\frac{\partial}{\partial s}\ln B(0,s)ds$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T (1-e^{-2as})(1-e^{-a(T-s)})ds. \quad (15)$$

La primera integral de la última igualdad de (15) se calcula mediante integración por partes

$$\int_t^T (1-e^{-a(T-s)})\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln B(0,s)ds = -(1-e^{-a(T-t)})\frac{\partial}{\partial t}\ln B(0,t) + a\int_t^T e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s}\ln B(0,s)ds. \quad (16)$$

La segunda integral en (15) satisface

$$\int_t^T (1-e^{-a(T-s)})\frac{\partial}{\partial s}\ln B(0,s)ds$$

$$= \int_t^T \frac{\partial}{\partial s}\ lnB(0,s)ds - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s}\ lnB(0,s)ds$$

$$= ln\left(\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right) - \int_t^T e^{-a(T-s)}\frac{\partial}{\partial s} lnB(0,s)ds. \qquad (17)$$

Finalmente, la tercera integral está dada por

$$\int_t^T (1 - e^{-2as})(1 - e^{-a(T-s)})ds$$

$$= \int_t^T (1 - e^{-2as} - e^{-a(T-s)} + e^{-a(T+s)})ds$$

$$= T-t + \left(\frac{1}{2a} - e^{-2at} - \frac{1}{2a}\ e^{-2aT} + \frac{1}{a}\ e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a}\ e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a}\right). \qquad (18)$$

Después de sustituir (16), (17) y (18) en (15), se sigue que

$$\int_t^T bs^{(0)}(1 - e^{-a(T-s)})ds$$

$$= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right) \frac{\partial}{\partial t}\ lnB(0,t) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s}\ lnB(0,s)ds$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(T-t - \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a}\right). \qquad (19)$$

Por lo tanto,

$$A(t,T) = -\int_t^T b_s^{(0)}(1 - e^{-a(T-s)})ds$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(T-t + \frac{2}{a}\ e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right)$$

$$= ln\left(\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right) - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right) \frac{\partial}{\partial t}\ lnB(0,t)$$

$$- \frac{\sigma^2}{4a^3}\ (- e^{-2aT} - e^{-2at} + 1\text{-}2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} + 2e^{-a(T+t)}) \qquad (20)$$

En conclusión

$$A(t,T) = ln\left(\frac{B(0,T)}{B(0,t)}\right) - D(t,T)\frac{\partial}{\partial t} lnB(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(e^{-aT} - e^{-at})^2(e^{2at} - 1) \quad (21)$$

3. Duración y convexidad de futuros de tasas de interés

En esta sección se define la duración y convexidad monetaria de los futuros sobre CETES a 91 días, los cuales son los instrumentos financieros de cobertura que utilizaremos para inmunizar nuestros flujos de efectivo. Para valuar el futuro del CETE a 91 días se utilizará un registro histórico de las curvas de rendimiento estimadas, R_n, con la metodología de Hull y White de acuerdo con las ecuaciones (4), (7) y (21):

$$F_{t,T,T+91}^{(n)} = M\left[\frac{1 + R_n^{(T)}\left(\frac{T-t}{360}\right)}{1 + R_n^{(T+91)}\left(\frac{T+91-t}{360}\right)}\right] \quad (22)$$

Aquí, $F_{t,T,T+91}^{(n)}$ es el precio del futuro del CETE a 91 días, observado al tiempo t, con vencimiento en T y plazo de inversión $T+91$. $R_n^{(T+91)}$ es la tasa de CETES en el intervalo [t,T 91], $R_n^{(T)}$ es la tasa de interés estimada de CETES en [t,T] y M es el valor nominal del contrato. Note también que el paréntesis de la ecuación (1) expresa la tasa *forward*.

La duración del futuro es la derivada de (22) con respecto de la tasa de interés y la convexidad es la segunda derivada del futuro con respecto de la tasa de interés. Se puede apreciar que para cambios moderados en la tasa de interés, el diferencial entre estas dos medidas de sensibilidad aumenta.

Existen dos flujos importantes que se generan con un contrato futuro en los tiempos T y T + 91: el precio $F_{t,T,T+91}^{(n)}$ y valor nominal M del activo subyacente, respectivamente. Es importante destacar que conforme nos acercamos al tiempo T, el precio del futuro se aproxima al precio *spot* del CETE a 91 días. Por esta razón se presenta un flujo de efectivo por la operación pactada (compra o venta).

4. Determinación del número de contratos

La pregunta que se responde en esta sección es ¿cómo podríamos cubrir nuestros flujos financieros para evitar pérdidas de valor presente por la exposición al riesgo mercado? Para realizar la cobertura de flujos de efectivo que se tienen programados, podríamos seguir los cuatro principios siguientes:

1. Tomar una posición con futuros inversa a la posición que se mantiene sobre el flujo. Es decir, si estamos largos en nuestros flujos, entonces tomamos una posición corta a futuro y viceversa.

2. Determinar el número de contratos a futuro. Esto lo podríamos llamar "ajuste por volumen".

3. Si el futuro está referido a una fecha diferente a la fecha del flujo, entonces las posibles pérdidas o ganancias que se generen en nuestros flujos pueden ser diferentes a las posibles ganancias o pérdidas que se generaría con nuestra posición en futuros, por lo que es necesario que nuestra posición en futuros, además de ajustarse por volumen, se ajuste por la duración y convexidad monetaria de nuestros flujos.

4. Si los cambios no son pequeños desplazamientos paralelos sino cambios moderados, podrían cometerse errores graves de aproximación. Por lo anterior, es importante considerar las limitaciones de la convexidad de nuestros flujos y de nuestros futuros.

El método que se propone para inmunizar los flujos financieros es el siguiente: se igualan la duración monetaria y la convexidad monetaria de dos series de futuros de CETES, con la duración monetaria y la convexidad monetaria de los flujos financieros. El sistema resultante contempla 2 ecuaciones con 2 incógnitas, digamos N_1 y N_2, que representan el número de contratos a futuro sobre CETES de dos series. Así pues, el sistema que se tiene que resolver es:

$$
\begin{aligned}
&D(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})N_1+D(T_2;F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91})N_2=D_n(f)\\
&C(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})N_1+C(T_2;F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91})N_2=C_n(f)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Donde $D(T_t;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})$ y $C(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})$ denotan, respectivamente, la duración y convexidad monetarias del futuro $F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91}$. De la misma manera, $D_n(f)$ y $C_n(f)$ denotan la duración y convexidad de los flujos financieros en cuestión. En este caso, se puede verificar rápidamente que la solución está dada por:

$$
\begin{aligned}
N_1&=\frac{D_n(f)C(T_2;F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91})-C_n(f)D(T_2;F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91})}{D(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})C(T_2;F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91})-C(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})D(T_2;F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91})},\\
N_2&=\frac{D_n(f)C(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})-C_n(f)D(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})}{D(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})C(T_2;F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91}1)-C(T_1;F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91})D(T_2;F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91})}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Observe que N_1 y N_2 dependen de varios factores: 1) de los montos y fechas de los flujos de efectivo y 2) de los precios y vencimientos de los contratos futuros. Si $N_i > 0$, se genera una posición larga (comprar contratos), en caso contrario se genera una posición corta (vender contratos). El costo de la estrategia de inmunización se calcula multiplicando N_1 y N_2 por los correspondientes márgenes iniciales (aportaciones iniciales mínimas) y, en su caso, por el margen adicional (aportaciones excedentes) cuando la calidad crediticia del inversionista así lo amerite.

Se dice que los contratos futuros $F=\{F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91}, F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91}\}$, con fechas de vencimiento T_1 y T_2 y fechas de plazo de inversión T_1+91 y T_2+91, inmunizan a f si $F=\{F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91}, F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91}\}$ y N_1 y N_2 satisfacen (24). Es importante señalar algunas limitaciones del método. Primero, con tres o más series de futuros de tasas de interés, se obtendría un sistema de dos ecuaciones con tres o más incógnitas. Por lo tanto, existirá un número infinito de estrategias de cobertura, de las cuales se pueden escoger algunas que cumplan ciertas restricciones sobre cantidades de contratos en función de la liquidez de los mismos. De la misma forma, podríamos incluir como restricción el valor presente del portafolio (flujos y futuros), lo que de alguna manera permitiría considerar ternas de series de futuros de CETES en lugar de pares; ya que tendríamos en este caso un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Segundo, el método nos cubre de manera limitada contra cambios no moderados, siendo insuficiente la incorporación de la convexidad. La actualización periódica de la estrategia permitirá una mejor protección ante el riesgo.

El método supone liquidez infinita (efecto precio despreciable) y supone además que se pueden vender fracciones de contratos futuros. Sin embargo, es importante notar que la estandarización de los contratos, no permite tomar posiciones sobre nominales distintos a los múltiplos generados por el tamaño del contrato. Por último, vale la pena señalar que existen métodos alternativos para inmunizar riesgos de tasas de interés en flujos financieros que minimizan la convexidad.

5. Método global de inmunización de flujos financieros

Una vez que se han determinado las soluciones locales del problema de inmunización, dichas estrategias de cobertura se evalúan en términos globales, es decir, en términos de las variaciones de mercado de la tasa de interés en el escenario del último año. A partir de un registro histórico de la estructura de plazos de la tasa de interés de CETES, se genera la distribución del valor presente de un conjunto de flujos financieros con y sin cobertura.

5.1 Distribución global del valor presente de un conjunto de flujos esperados.

En esta sección llevaremos a cabo un análisis estadístico del comportamiento histórico de la curva de rendimiento a fin de obtener la distribución del valor presente de un conjunto dado de flujos financieros. Considere, como antes, un conjunto de flujos esperados, tanto de pasivos como de activos, $f=\{f_1, f_2,\ldots, f_l,\ldots, f_m\}$ en fechas preestablecidas $t_1, t_2,\ldots, t_l,\ldots, t_m$. Suponga que se cuenta con un registro histórico, B, de curvas de rendimiento R_n. El valor presente de los flujos financieros, f, con la tasa de la *j-ésima* curva de rendimiento se denotará por $V_j(f)$. Si B es pensado como un conjunto de posibles escenarios (estados de la naturaleza), entonces $\{V_1(f),\ldots,V_j(f),\ldots,V_n(f)\}$ puede verse como una muestra proveniente de la distribución del valor presente de f, denotado por *V(f)*. La distribución empírica de *V(f)*se define para cualquier $x \in (-\infty,\infty)$ como:

$$G_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < V_{(1)}(f), \\ \frac{k}{n}, & \text{si } V_{(k)}(f) \le x < V_{(k+1)}(f)\ (k = 1,2,\ldots,l,\ldots,n-1) \\ 1, & \text{si } x \ge V_{(n)}(f), \end{cases} \tag{25}$$

donde $V_{(1)}(f),\ldots,V_{(j)}(f),\ldots,V_{(n)}(f)$ son las estadísticas de orden de la muestra $\{V_1(f),\ldots,V_j(f),\ldots,V_n(f)\}$, i.e., los valores muestrales ordenados en forma creciente. El percentil (o cuantil de orden *p*) de *V(f)*, denotado por x_p, se define mediante:

$$p \le G_m(x_p) \le p + Pr_G\{V(f) = x_p\} \tag{26}$$

La distribución empírica nos permite calcular la probabilidad de que el valor presente de nuestros flujos tome valores menores que un cierto percentil, lo cual es útil para establecer regiones de riesgo con cierto nivel de confianza. Es decir, dentro del contexto de la metodología del valor en riesgo y construyendo una distribución empírica, podemos calcular el valor en riesgo de nuestro portafolio (flujos de activos y pasivos) para variaciones diarias de las tasas, con un cierto nivel de confianza.

5.2 Distribución global del valor presente de un conjunto de flujos esperados cubiertos con futuros.

Una vez que hemos calculado el número de contratos futuros de dos series de CETES, como soluciones locales, se determina la distribución del valor presente de un conjunto de flujos esperados incorporando futuros; a fin de evaluar las soluciones globalmente y cuantificar el riesgo de este portafolio ampliado con la incorporación de operaciones financieras derivadas. Considere un conjunto de flujos financieros, $f = \{f_1, f_2,\ldots, f_l,\ldots, f_m\}$ en fechas preestablecidas $t_1, t_2,\ldots, t_l,\ldots, t_m$. Suponga, además, que se cuenta con una muestra *B* de curvas de rendimiento. Entonces, el valor presente de los flujos financieros incluyendo los futuros, $F=\{F^{(n)}_{t,T_1,T_1+91}, F^{(n)}_{t,T_2,T_2+91}\}$, que inmunizan dichos flujos con la estructura de plazos asociada al *j*-ésimo elemento de *B*, con fechas de vencimiento T_1 y T_2 y fechas de plazo de inversión T_1+91 y T_2+91, respectivamente, se denota por $V_j(f,F)$.

En este caso, la distribución empírica de $V(f,F)$ se define para cualquier $z \in (-\infty, \infty)$ como:

$$H_m(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < V_{(1)}(f,F), \\ \dfrac{k}{n}, & \text{si } V_{(k)}(f,F) \leq z < V_{(k+1)}(f,F) (k = 1,2,...,l,...,n-1), \\ 1, & \text{si } z \geq V_{(n)}(f,F), \end{cases} \quad (27)$$

donde $V_{(1)}(f,F),\ldots,V_{(j)}(f,F),\ldots,V_{(n)}(f,F)$ son las estadísticas de orden de la muestra $\{V_1(f,F),\ldots,V_j(f,F),\ldots,Vn(f,F)\}$, *i.e.*, son los valores muestrales ordenados en forma creciente. El percentil (o cuantil de orden p) de $V(f,F)$, denotado por z_p, se define mediante:

$$p \leq H_m(z_p) \leq p + Pr_H\{V(f,F) = z_p\} \quad (28)$$

6. Aplicación del método

Uno de los métodos más utilizados en la medición de riesgos de mercado es el de Valor en Riesgo (VeR) (véase Jorion, 1999). En esta metodología se genera la distribución de pérdidas potenciales, la cual se utiliza para estimar intervalos de confianza de posibles pérdidas con cierto grado de confianza estadística y en un plazo determinado. En esta sección, estamos interesados en analizar potenciales pérdidas en el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo, a través de los valores históricos de la tasa de interés.

A continuación se ilustra el método propuesto de inmunización global para un conjunto de flujos de efectivo. Los objetivos específicos de este ejercicio son: 1) medir el riesgo a partir de métodos locales (para cambios pequeños en tasas de interés); 2) analizar cómo cambios adversos en la tasa de interés afectan el valor presente de los flujos; 3) presentar varias estrategias con futuros que inmunizan los riesgos de un conjunto de flujos; y 4) evaluar las distintas estrategias con el fin de seleccionar la más adecuada para cubrir los flujos de efectivo.

En el siguiente ejercicio, a partir de un registro histórico de la estructura de plazos de la tasa de CETES, se genera la distribución del valor presente de los flujos financieros. Posteriormente, con referencia a la curva de rendimientos más reciente se determinan la duración y convexidad monetaria del valor presente de dichos flujos y se calculan las cantidades de contratos futuros que lo inmunizan, las cuales son soluciones locales. Estas cantidades, junto con los precios de los futuros, se utilizan para generar la distribución conjunta de los flujos financieros y de los flujos propios de los futuros, tanto para el método propuesto como para su extensión que considera variaciones de mercado en la tasa de interés.

Se comparan las varianzas de las distribuciones empíricas de los flujos financieros con y sin futuros para ambos métodos, con el fin de analizar el efecto que en términos de reducción de riesgos tiene la incorporación de futuros en nuestro portafolio de activos y pasivos. En la Cuadro 1 se presenta un conjunto de flujos dados, así como las fechas de vencimiento de los contratos futuros. La muestra de curvas de rendimiento que se consideró es del 31 de diciembre de 2007 al 30 de junio de 2008.

CUADRO 1. FLUJOS DE EFECTIVO, VENCIMIENTOS DE FUTUROS Y ESTRATEGIAS DE COBERTURA

Fechas de flujos	**Montos de flujos**	**Vencimientos de futuros CETES**			
31-Dic-07	-$915,000.00	21-Dic-07		**método histórico**	
31-Ene-08	-$945,000.00	20-Mar-08		**c/futuros**	**s/futuros**
31-Mar-08	$1,000,000.00	N1= 12.01	**media**	19,365.27	-9,198.27
30-Jun-08	$1,000,000.00	N2= 14.34	**desv.est.**	401.11	26,985.21
		21-Dic-07		**método histórico**	
		20-Jun-08		**c/futuros**	**s/futuros**
		N1= 18.46	**media**	18,452.89	-8,992.06
		N2= 8.29	**desv.est.**	5,117.80	27,979.82
		20-Mar-07		**método histórico**	
		20-Jun-08		**c/futuros**	**s/futuros**
		N1= 44.22	**media**	21,025.67	-10,327.93
		N2=- 18.01	**desv.est.**	9,101.41	29,387.49

Como puede observarse, en el Cuadro 1, las fechas preestablecidas de los flujos de efectivo no coinciden con las fechas de vencimiento de las series de CETES. Después de igualar la duración monetaria y la convexidad monetaria de dos series de futuros de CETES con la duración monetaria y la convexidad monetaria de los flujos financieros, se obtienen las cantidades de contratos que inmunizan los flujos. El Cuadro 1 muestra los resultados del método histórico.

Observese que para la estrategia con fechas de vencimiento T_1 = 21-Dic-07 y T_2 = 20-Mar-08 se tiene una reducción en la varianza al incluir futuros. Lo mismo sucede para las fechas de vencimiento T_1 = 21-Dic-07 y T_2 = 20-Jun-08, así como para T_1 = 20-Mar-07 y T_2 = 20-Jun-08. Sin embargo, para fechas de vencimiento lejanas a las de los flujos, la varianza de estos incluyendo futuros aumenta. Observese, de igual manera, que el par de series de varianza mínima en el valor presente de los flujos está dado por el primer caso, en donde la reducción de la varianza es altamente significativa. Después de generar la distribución del valor presente de un conjunto de flujos esperados incorporando futuros, con el objetivo de determinar las soluciones globales, se tiene el siguiente Cuadro resumen del valor en riesgo por variaciones de mercado:

CUADRO 2. CUADRO RESUMEN DE VARIACIONES DE MERCADO

	Variaciones de mercado con futuros	**Variaciones de mercado sin futuros**
	Media 18,345.31	Media 25,5987.78
	Desv.Est. 498.36	Desv.Est. 18,758.23
Percentil	**VP**	**VP**
Máximo	21,233.56	119,438.16
0.995	20,786.58	91,466.49
0.990	20,773.72	85,387.28
0.950	20,196.24	56,396.42
0.900	19,321.17	43,003.73
0.800	19,199.36	32,271.09
0.700	19,191.43	27,386.41
0.600	19,156.45	27,047.87
0.500	19,129.87	24,379.29
0.400	19,117.62	21,939.56
0.300	19,101.67	18,844.39
0.200	19,024.49	13,843.45
0.100	18,462.33	7,658.29
0.050	18,333.48	5,487.20
0.010	18,011.14	-11,768.23
0.005	17,865.49	-23,958.31
Mínimo	16,398.12	-77,987.32

7. Conclusiones

Se ha presentado un modelo de inmunización contra fluctuaciones adversas en la tasa de interés con futuros financieros. A partir de un registro histórico de las estructuras de plazos de la tasa de interés de CETES, generadas con el modelo de Hull y White, se obtuvieron las distribuciones empíricas de un flujo financiero dado, con y sin inmunización a través de contratos futuros. El objetivo fue comparar los efectos en la varianza de dichos flujos antes y después de la cobertura. Los conceptos de duración y convexidad monetaria desempeñaron un papel importante en el desarrollo del modelo en cuanto a la medición y control del riesgo en tasas de interés.

Siempre es posible encontrar un par de series de futuros de CETES que inmunicen a un flujo financiero *f*. Sin embargo, no siempre este par reduce la varianza de los flujos. Este problema es equivalente a uno de programación entera en donde se tiene un conjunto de puntos factibles sin restricción en el signo (pares de series) y se desea encontrar aquél que minimice la dispersión. En este sentido, se necesita más investigación para extender el conjunto factible con otros instrumentos de cobertura.

Bibliografía

Beckstrom, R. y A. Campbell (1995). *An Introduction to VAR, CATS software*, Palo Alto, CA.

Bierwarg, G. O., G. G. Kaufman and C. Khang (1978). "Duration and Bond Portfolio Analysis: An Overview", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, No. 4, pp.671-681.

Bierwarg, G. O., G. G. Kaufman and A. Toevs (1983a). "Duration: Its Development and Uses in Bond Portfolio Management: An Overview", *Financial Analysts Journal*, Vol. 39, No. 4, pp.15-35.

Bierwarg, G. O., G. G., Kaufman and A. Toevs (1983b). *Innovations in Bond Portfolio Management*, Greenwich, CT: JAI Press.

Chance, D. M. (1990). "Default, Risk and the Duration of the Zero Coupon Bonds", *Journal of Finance*, Vol. 45, No. 2, pp. 265-274.

Chua, J. H. (1984). "A Closed-Form Formula for Calculating Bond Duration", *Financial Analysts Journal*, Vol. 40, No. 3, pp. 76-78.

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1979). "Duration and the Measurement of Basis Risk", *Journal of Business*, Vol. 52, No. 1, pp. 51-61.

Fabozzi, F. y I. Pollack, (1987). *The Handbook of Fixed Income Securities*, Dow-Jones, Irwin.

Fabozzi, F. (1994). *Advanced Strategics in Risk Management Fixed Income Securities*, Mc Millan.

Granito, M. (1984). *Bond Portfolio Immunization*, Lexington Books, D.C. Heath and Company.

Ho, T. y S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest-Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, Vol. 42, No. 5. pp. 1129-1142.

Hull J. C. y A. White (1990). "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.

Ingersoll, J. E., J. Skelton y R. L. Weil (1978). "Duration Forty Years Later", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, No. 4, pp. 627-650.

Islas Camargo, A. y F. Venegas-Martínez (2003). "Pricing Derivatives Securities with Prior Information on Long-memory Volatility", *Economía Mexicana*, Nueva época, Vol. 12, No. 1, pp. 103-134.

Jorion, P. (1999). *Valor en Riesgo*, Editorial Limusa, Grupo Noriega Editores.

Kolb, R. W. (1998). *Practical Reading in Financial Derivatives*, en Robert W. Kolb ed., Blackwell publishers Ltd.

Kupiec, P. (1995). "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *Journal of Derivatives*,Vol. 2, pp. 73-84.

Nelson, C. R. y A. F. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curves", *Journal of Business*, Vol. 60. No. 4, pp. 473-489.

Platt, R. B. (1986). *Controlling Interest Rate Risk: New Techniques and Applications for Money Management*, John Wiley & Sons.

Schaefer, S. (1986). "Immunization and Duration: A Review of Theory, Performance and Applications", en J. M. Stern y D. H. Chew Jr. (eds.). *The Revolution in Corporate Finance*, New York: Basil Blackwell.

Vasicek, O. A. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.

Venegas-Martínez, F. (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO", *Estudios Económicos*, Vol. 16, No. 32, pp. 203-226.

Venegas-Martínez, F. (2002). "Cobertura de flujos financieros con instrumentos de renta fija", *Estudios Económicos*, Vol. 17, No. 2, pp. 171-192.

Venegas-Martínez, F. (2003a). "Inmunización de flujos financieros de tesorerías con bonos cupón cero: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Heath, Jarrow y Morton", *Momento Económico*, No. 129-130, pp. 3-17.

Venegas-Martínez, F. (2003b). "Inmunización de flujos financieros con futuros de tasas de interés: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Nelson y Siegel", *Revista de Administração Mackenzie*, Vol. 4, No. 1, pp. 107-123.

Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad", *El Trimestre Económico*, Vol. 69(2), No. 274, pp. 227-250.

Venegas-Martínez, F., B. González-Aréchiga y J. Díaz-Tinoco (2002). "Cobertura con futuros de títulos de capital", *Momento Económico*, No. 120, pp. 14-34.

Zenios, S. A. (1996). *Financial Optimization*. En Stavros A. Zenios (ed.), Cambridge University Press.