Situaciones de Pobreza en el Modelo Arrow-Debreu

*Alberto Benítez Sánchez**

Resumen

El propósito de este trabajo es plantear el problema de la pobreza en el modelo Arrow-Debreu. Se busca con ello considerar las alternativas básicas que se ofrecen a dicho problema, dentro del modelo citado, y también, a un nivel más general, dentro de la economía neoclásica.

Con este fin, se estudia una economía muy sencilla integrada por una empresa y un consumidor, en la que se muestra cómo pueden presentarse situaciones de pobreza en su posición de equilibrio. Después de considerar las distintas alternativas que se ofrecen a las situaciones mencionadas, se estudia un caso en el que se pueden comparar varios equilibrios, algunos con situaciones de pobreza y otros sin ellas.

Palabras clave: Pobreza, equilibrio general, modelo Arrow-Debreu.

* Profesor del Área de Economía de la UAM-I.

La Empresa

La economía tendrá un solo lugar y dos fechas para la entrega de las mercancías, la primera será el principio y la segunda el final del periodo de referencia. Desde el punto de vista físico habrá dos bienes: el trabajo y el maíz, pero incorporando las fechas de entrega definiré tres mercancías: el maíz entregado en la primera fecha, el trabajo entregado en la primera fecha y el maíz entregado al final del periodo. En lo sucesivo me referiré a estos bienes como las mercancías *1*, *2* y *3*, respectivamente.

La técnica de la empresa tiene rendimientos constantes a escala y puede ser representada de la manera siguiente:

$$2/5_{(1)} \oplus 2/5_{(2)} \rightarrow 1_{(3)}$$

que indica que para producir *1* unidad del bien *3* se requieren *2/5* de cada uno de los otros dos bienes.

Supondré que los insumos son complementarios, por lo que el dominio de la función de producción correspondiente es la diagonal del cuadrante negativo del plano determinado por los ejes *1* y *2*, a la que representaré con la notación D^*. La función mencionada puede ser representada por la fórmula:

$$-(5/4)(y_1 + y_2) = y_3 \qquad y_1 = y_2 \leq 0 \tag{1.1}$$

a la que corresponde una recta.

De acuerdo con lo anterior, el conjunto de las producciones posibles (Y) está contenido en el plano determinado por D^* y por el eje 3. En lo sucesivo me referiré a este plano con la notación P^*.

A cada punto de la función de producción (y_1, y_2, y_3) corresponden las coordenadas (d, y_3) en el plano P^*, en las cuales:

$$d = [(y_1)^2 + (y_2)^2]^{½} \tag{1.2}$$

Visto desde una perspectiva perpendicular al plano P^*, el conjunto Y luciría como se muestra en la figura 1.

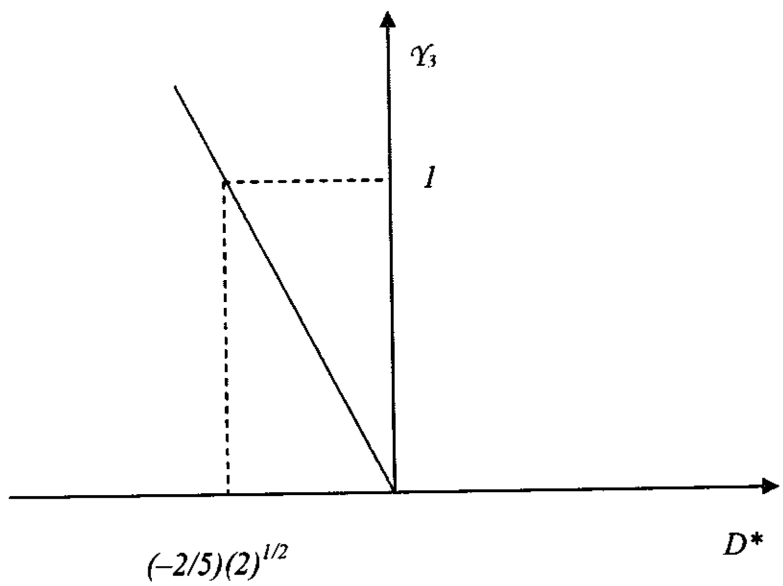

Figura 1

Dado que el punto $(-2/5, -2/5, 1)$ está en la función de producción, el punto $[(-2/5)(2)^{1/2}, 1]$ está en la gráfica de la figura 1. Por este motivo, la pendiente de esta última es:

$$m = -5/(2)(2)^{1/2} \tag{1.3}$$

y la ecuación correspondiente es:

$$-5/(2)(2)^{1/2}d = y_3 \tag{1.4}$$

El Consumidor

El consumidor posee, al principio del periodo, ciertas cantidades de los bienes *1* y *2* que serán especificadas más adelante. El conjunto de los planes de transacciones posibles está contenido en el espacio determinado por las partes negativas de los ejes 1 y 2, más la parte positiva del eje 3, y será representado con la notación X[1].

La función de utilidad es la siguiente:

$$U(x) = x_3 - (x_1)^2 - (x_2)^2$$

Por lo que el orden de las preferencias es estrictamente convexo. Si k es un valor cualquiera de esta función, la clase de equivalencia correspondiente es la superficie determinada por la ecuación:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + k = x_3 \qquad (x_1, x_2) \leq (0,0) \tag{2.1}$$

Sea D una recta que pasa por el origen y por un punto cualquiera $(x_1, x_2, 0)$, en donde $(x_1, x_2) \leq (0,0)$; y sea P el plano que contiene a esta recta y al eje 3. La intersección de P con X, vista desde una perspectiva perpendicular a P, se muestra en la figura 2.

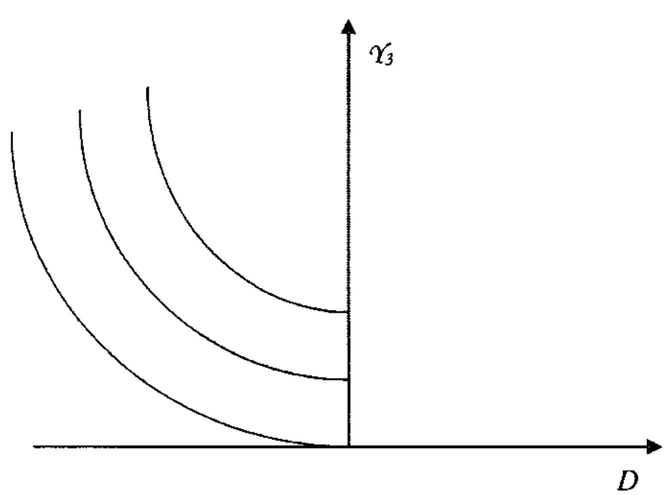

Figura 2

[1] Cabe recordar que el conjunto de transacciones posibles se obtiene mediante la fórmula $C - \{w\}$, donde C es el conjunto de consumo, y $w = \{w_1, 0, 0\}$ es el conjunto de las

Si se utilizan las coordenadas cartesianas del plano P, para cada k la intersección de la clase de equivalencia correspondiente con P es la curva determinada por la ecuación:

$$d^2 + k = x_3 \qquad (2.2)$$

en la cual d se obtiene sustituyendo en (1.2) cada "ye" por la "equis" correspondiente.

Una Situación de Equilibrio

Obsérvese que con el sistema $p^* = (5/14, 5/14, 4/14)$, la ganancia de la empresa es nula independientemente de la cantidad que se produzca. Por tal motivo, se puede decir que la imagen de su función de oferta es igual a la gráfica de su función de producción.

Esto se puede visualizar si se toma en cuenta que dicho vector de precios está contenido en el plano P^*, debido a que los precios *1* y *2* son iguales. Por otra parte, la longitud de la proyección de p^*, sobre la diagonal D^*, será igual a $[(5/14)^2 + (5/14)^2]^{1/2} = (5/14)(2)^{1/2}$; por lo cual las coordenadas de p^*, en el plano P^*, son $[(5/14)(2)^{1/2}, 4/14]$.

Asimismo, con el sistema p^* la ganancia será igual a cero, por lo que el plano del presupuesto del consumidor pasará por el origen y, siendo perpendicular a p^*, contendrá la gráfica de la función de producción. Además, la intersección del plano del presupuesto con cualquier plano paralelo al plano determinado por los ejes *1* y *2*, formará un ángulo recto con la recta D^* (visto desde el eje *3*), como se muestra en la figura 3.

De acuerdo con lo anterior, el plano del presupuesto podrá ser tangente a una de las clases de equivalencia solamente en un punto contenido en el plano P^*, como se muestra en la figura 4.

dotaciones iniciales. Si w_1 es la cota superior para el consumo del bien 1, el conjunto X queda contenido dentro de los límites señalados. Esto implica que el presupuesto del que dispone el consumidor para sus transacciones, será igual a la ganancia que le corresponda.

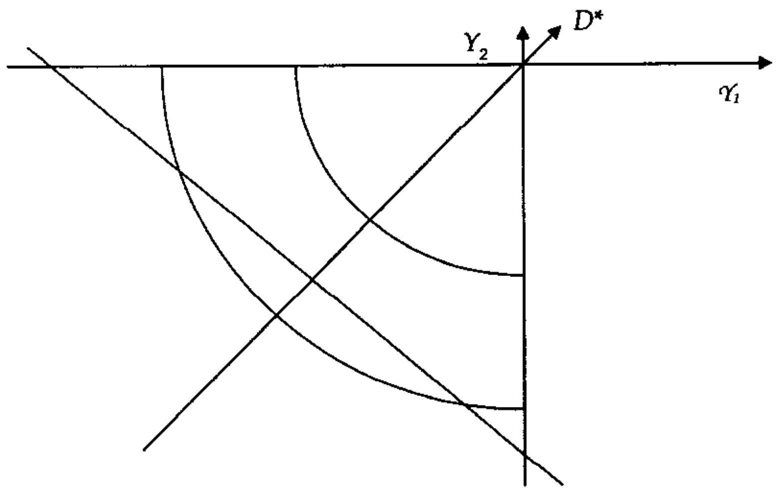

Figura 3

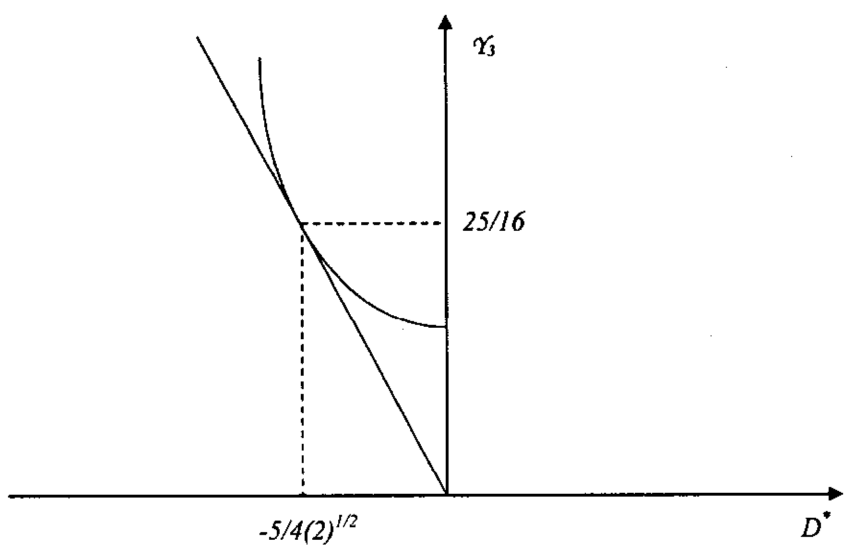

Figura 4

Para determinar el punto de tangencia de alguna de las clases de equivalencia con el plano del presupuesto, se debe observar que en dicho punto el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva (2.2) es igual al de la recta (1.1). Por lo tanto, el valor de la derivada de (2.2) debe ser igual al lado derecho de (1.3), es decir:

$$2d = -5/(2)(2)^{1/2}$$

lo cual implica que:

$$d = -5/(4)(2)^{1/2}$$

Sustituyendo d en (1.4) por el lado derecho de esta ecuación se obtiene:

$$[-5/(2)(2)^{1/2}][-5/(4)(2)^{1/2}] = y_3$$

de donde se sigue que:

$$y_3 = 25/16$$

Sustituyendo ahora los valores de d y de x_3 $(= y_3)$ en (2.2) se obtiene:

$$[-5/(4)(2)^{1/2}]^2 + k = 25/16$$

de lo que se deduce que:

$$k = 0.78125$$

Sustituyendo ahora el valor de d en (1.2) se obtiene:

$$[(x_1)^2 + (x_2)^2]^{1/2} = -5/(4)(2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad (x_1)^2 + (x_2)^2 = 25/32$$

ahora bien, $x_1 = x_2$ por lo que la ecuación anterior se puede escribir de la forma siguiente:

$$2(x_1)^2 = 25/32$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = (25/64)^{1/2}$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = -5/8$$

Aquí se toma la raíz negativa porque se trata de una oferta. Por lo tanto, el vector de equilibrio del consumidor es:

$$\xi\,(p^*) = (-5/8, -5/8, 25/16)$$

Por su parte, el productor maximiza su ganancia con cualquier punto de la función de producción, por lo que el vector:

$$y^* = (-5/8, -5/8, 25/16)$$

está dentro de la imagen de la correspondencia $\eta(p^*)$.

De acuerdo con lo anterior, el vector p^* es un sistema de precios de equilibrio.

Las Situaciones de Pobreza

Sea L la mínima cantidad de maíz que debe poseer el consumidor al principio del periodo, para no ser considerado pobre (ya sea por sí mismo o por un observador); Q la cantidad mínima de maíz que requiere para sobrevivir; C la cantidad que consume durante el periodo por encima de Q; w_1 la cantidad de maíz que posee al principio del periodo y 1 la cantidad máxima de trabajo que puede realizar.

Suponiendo que $Q > 0$ y que w_1 es constante, consideraré los casos siguientes:

Caso 1: $Q < w_1 - 5/8$ y $w_1 < L < 25/16$.

El consumidor es pobre al principio del periodo, pero ya no lo será al final del mismo, independientemente de la magnitud de C.

Caso 2: $Q < w_1 - 5/8$ y $w_1 + 25/16 - 5/8 - Q - C \leq L$

El consumidor será pobre al principio del periodo y podría no serlo al final del mismo, sólo si se da la igualdad en la segunda desigualdad. En caso contrario, si sus gastos son inferiores a su ingreso corriente podrá ahorrar la diferencia entre estas cantidades (H), la cual está determinada por:

$$H = 25/16 - 5/8 - Q - C$$

Esto le ofrece la posibilidad de salir de pobre, para lo cual el número de periodos necesarios se determina con base en el siguiente cociente:

$$[L - (w_1 + H)]/H \tag{4.1}$$

El numerador indica lo que le falta al agente, al finalizar el primer periodo, para dejar de ser pobre. Por lo tanto, si este cociente es un entero, el número de periodos señalado será igual al cociente más *1;* y si no, será igual al entero inmediatamente superior al cociente más *1*.

Caso 3: $Q < w_1 - 5/8$ y $w_1 \geq L > 25/16$

El consumidor no es pobre al principio del periodo, pero podría llegar a serlo si su consumo es superior a su ingreso corriente, en cuyo caso se verifica la relación siguiente:

$$25/16 - w_1 \leq H < 0$$

Por lo tanto, el agente será pobre después de un número de periodos determinado con base en el cociente (4.1).

En efecto, si dicho cociente es menor que cero, el agente será pobre al final del primer periodo. Si es mayor o igual que cero, el agente será pobre al final de un número de periodos igual al valor absoluto del cociente más *1,* si dicho cociente es un entero y si no se agrega *1* al entero inmediatamente superior a dicho valor absoluto.

Caso 4: $Q = w_1 - 5/8$ y $L > w_1 > 25/16$

El consumidor no sólo es pobre durante todo el periodo, sino que además no podrá sobrevivir en el siguiente periodo, sin recursos adicionales a los ingresos que provienen de la producción.

Una Economía con Varios Equilibrios

Consideraré ahora una economía idéntica a la que se estudió en las cuatro secciones anteriores, salvo porque la convexidad del orden de preferencia deja de ser estricta.

Ahora, la intersección de cualquier plano de tipo P con una clase de equivalencia tiene la forma presentada en la figura 5.

Como se puede observar en esta figura, cada intersección de P con una clase de equivalencia consta de tres secciones rectas, separadas por dos puntos de inflexión cuyas abscisas d_1 y d_2 son tales que:

$$d_2 < d_1 < 0$$

Por otra parte, la pendiente de la sección central de cada línea (m) está determinada por (1.3); mientras que las pendientes de la sección más cercana al eje 3 (m_1) y de la sección más alejada del mismo eje (m_2), son tales que:

$$-1 > m_1 < m \text{ y } m_2 < m$$

y son las mismas para todas las clases de equivalencia y para todo P.

En estas condiciones, el vector p^* establecido en la sección 3 también será un sistema de precios de equilibrio en esta economía.

En efecto, la función de oferta del productor es la misma que en el caso anterior, y el nivel de ganancia también es cero, por lo que el plano del presupuesto del consumidor también contiene, en este caso, a la gráfica de la función de producción.

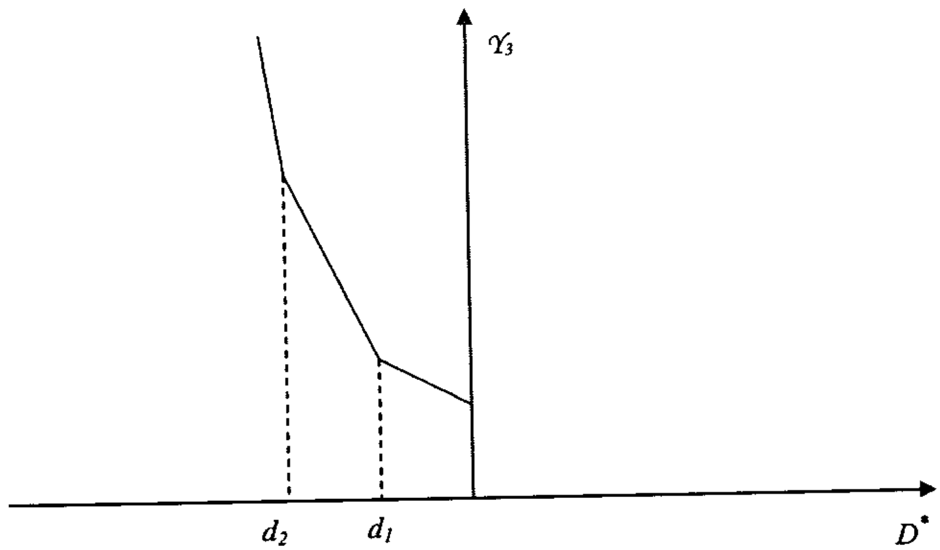

Figura 5

Además, toda recta paralela al plano horizontal que esté contenida en el plano del presupuesto, formará un ángulo recto con D^* (vista desde el eje 3), como se muestra en la figura 3. Por este motivo, dicho plano podrá ser tangente a una clase de equivalencia sólo en el plano P^*.

En consecuencia, $\xi(p^*)$ contendrá a la sección central de la intersección del plano P^* con una de las clases de equivalencia, la cual se caracteriza porque su sección central coincide con un segmento de la función de producción.

Por este motivo, todos los puntos del segmento $[(d_1, md_1), (d_2, md_2)]$ de la función de producción serán puntos de equilibrio. Distinguiré con la notación (d^*, md^*) a un punto cualquiera que se encuentre al interior de este segmento.

Consideraré el caso siguiente:

Caso 6: $Q = w_1 + d^*$ y $L = w_1 = md^*$

El consumidor tendrá lo mismo al principio y al final del periodo y no será pobre en ningún momento, si en las ecuaciones anteriores se utiliza el valor d^* del equilibrio considerado en cada caso.

Supondré ahora que en la segunda ecuación se mantiene constante la coordenada d^* de un equilibrio particular (E_l), y que en la primera se incorpora el valor d^* correspondiente a otro equilibrio. El consumidor será pobre en todos los equilibrios situados a la derecha de cualquier equilibrio particular que se escoja como E_l.

De esta forma, en la economía considerada puede haber varios equilibrios: algunos con situaciones de pobreza y otros sin ellas.

Cabe agregar que todos los equilibrios son óptimos en el sentido de Pareto.

Conclusiones

El análisis de la sencilla economía que sirve como modelo a este trabajo, muestra que en el modelo de Arrow-Debreu se pueden presentar las diferentes situaciones que tienen mayor interés respecto de la pobreza.

Puede ocurrir, por ejemplo, que un agente caiga en la pobreza después de haber estado fuera de ella; que una vez que haya caído permanezca pobre o también que logre superar esa condición.

La razón principal que permite todas estas posibilidades es que el nivel de riqueza que corresponde al límite entre los pobres y el resto de la sociedad, es algo que se define de manera independiente a los parámetros del modelo. De tal forma que dada una economía cualquiera, se pueden presentar las diferentes situaciones que se estudiaron aquí a partir de una definición adecuada de dicho límite.

Por otra parte, dada una definición particular del límite señalado, se puede evaluar a cada economía para definir, en su caso, los parámetros de ésta que determinan la pobreza y las posibilidades que tiene dicha economía para superarla, o bien, los cambios que debe llevar a cabo para hacerlo.

En efecto, los agentes pueden ser tan pobres que su supervivencia no está garantizada si no se les ayuda. En los otros casos, dado un límite de pobreza cualquiera, un agente particular puede dejar de ser pobre, tanto si aumenta la productividad de la técnica utilizada como si el agente en cuestión realiza un ahorro durante el tiempo suficiente, o bien, mediante una combinación de las dos cosas.

Dado que la primera posibilidad parece corresponder sólo a una parte pequeña —aunque significativa— de los pobres en el mundo, cabe preguntarse sobre el conjunto de factores que mantienen a tantas personas en la pobreza. Sin embargo, este problema rebasa el propósito del artículo, el cual se limita a un planteamiento básico del tema dentro de la teoría neoclásica.

BIBLIOGRAFÍA

Arrow, K. J. y F. Hahn. *General competitive analysis.* Holden-Day, San Francisco, 1971. Traducción española: *Análisis general competitivo.* FCE, Madrid, 1977.

Benítez, A. "La teoría de los mercados competitivos". En Enrique de la Garza (compilador). *Ciencia Económica: Transformación de conceptos.* Siglo XXI, México, 1998.

Benítez, A. "Los planes de transacciones viables en el modelo Arrow-Debreu". *Investigación Económica*, núm. 215, México, 1996.

Debreu, G. *Theory of value.* Wiley, Nueva York, 1959.

Walras, L. *Elements d'économie politique pure.* Corbaz, Lausanne, 1874.