denarius
revista de economía y administración

Bases de medición e hipótesis de comparación en decisiones colectivas y multicriterio

Leobardo Plata-Pérez*

Resumen

Partiendo de una revisión del concepto de racionalidad que aparece en los modelos clásicos de decisión individual, se examinan la racionalidad transitiva y sus debilitamientos. Se analiza la conveniencia de usar como base preferencias o funciones de elección. Se plantea el problema de agregación de preferencias de la teoría de la elección social, señalando los resultados de imposibilidad de Arrow y de Gibbard-Satterwhite. Con base en esto, se profundiza en el concepto de medición analizando las diferentes escalas de medición de una estructura empírica. Se caracterizan las posibles formas de clasificar la información cuando se asumen distintos supuestos de comparación entre mediciones individuales. Esto se logra estudiando las particiones del conjunto de perfiles de mediciones de criterios. El trabajo hace referencia indistinta a problemas de decisión multicriterio o a problemas de elección colectiva.

Palabras clave: racionalidad transitiva, preferencias, medición de información.

* Investigador de la Facultad de Economía de la Universidad de San Luis Potosí.

1. Introducción

Los individuos y las sociedades enfrentan siempre problemas de decisión en diferentes entornos. Los conjuntos de alternativas por valorar pueden ser sencillos o complejos, con estructura o sin ella. Las restricciones enfrentadas pueden ser también muy variadas. Un elemento muy importante que debe tenerse en cuenta tiene que ver con la información disponible en el momento de tomar la decisión. La propia percepción y la calidad de la información tendrán que ver con la calidad de la decisión. Las consecuencias de las decisiones pueden ser de poca o mucha trascendencia, y van desde la de un individuo que decide qué ropa interior usará durante el día hasta la de un presidente que decide entre empezar o no un bombardeo aéreo contra otro país. Otros ejemplos de problemas relevantes donde es imprescindible tomar muy buenas decisiones son los de asignación de recursos escasos, que aparecen en diferentes contextos: provisión de bienes públicos, uso racional de recursos no renovables, problemas de contaminación, problemas de desarrollo y crecimiento urbano, problemas de pobreza y desigualdad. En todos estos casos interesa llegar a asignaciones viables que satisfagan criterios mínimos de eficiencia y justicia, que no siempre son asequibles sin controversias. También aparecen problemas relacionados con elecciones colectivas donde, conociendo las preferencias de los votantes, se intenta elegir a los representantes que mejor reflejen los gustos de los votantes. En este caso el problema está vinculado al diseño de instituciones que vigilen o pongan en práctica el "contrato social". Hay también problemas de elección de un proyecto para realizar una determinada obra. Puede haber diferentes criterios para evaluar los proyectos a nivel individual, cada criterio ordena de distinto modo los proyectos, pero al final hay que decidirse por uno solo de ellos. Las decisiones que se toman pueden ser de carácter eminentemente práctico como quizá sea el caso de muchos problemas de ingeniería o de elección de cartera, pero también pueden ser de mera especulación sobre posibilidades teóricas, como en el caso de algunos modelos de la teoría económica o la ciencia política. Podríamos aventurar que los problemas anteriores comparten un esquema formal común. Se tiene un conjunto de *alternativas* sobre el que hay que tomar una decisión, pero el conjunto es jerarquizado de distintas maneras por diferentes *criterios o preferencias individuales*.

Uno de los propósitos de este trabajo es presentar de manera unificada los problemas de agregación de preferencias individuales y de decisión multicriterio enfrentados por un centro de decisión cuando éste dispone de diferentes criterios para jerarquizar las alternativas viables. El primer problema nace documentado con la famosa paradoja de la votación de Condorcet (1785) y es tratado de manera rigurosa con la fundación académica de la teoría de elección social a través de la obra *Social Choice and Individual Values* de Kenneth Arrow (1951). Esta teoría ha tenido un gran auge y ha desarrollado ya campos muy especializados con problemas específicos de elección colectiva, sobre todo a partir de la aparición de *Colective Choice and Social Welfare,* de Amartya Sen (1970). La obra de Sen ha tenido gran repercusión en la ciencia política y la filosofía moral, además de la que tiene en la teoría económica, su campo de origen.[1] El problema de las decisiones multicriterio tuvo su origen en situaciones de decisión provocadas por la necesidad de elegir entre proyectos alternativos, así como en conflictos de empresa y en el campo de la ingeniería. El origen mismo de la problemática ha motivado los desarrollos posteriores, concentrados básicamente en la búsqueda de soluciones pragmáticas mediante algoritmos eficientes. Esta búsqueda suele realizarse con algún criterio del centro de decisiones en el conjunto de soluciones Pareto eficientes. La teoría de elección social se centra en el universo abstracto de las posibilidades o imposibilidades de reglas de elección colectiva que satisfagan criterios razonables. El método es entonces de carácter más axiomático que algorítmico. Personalmente sostengo que el problema estudiado es el mismo, aunque con ópticas diferentes pero complementarias. Sería muy provechoso hacer un balance para aprovechar esta complementariedad en ambos campos.

Este trabajo concentra su atención en los fundamentos de la modelación del problema y en el papel del uso de mediciones numéricas como vehículo para llegar a la decisión final. Iniciamos haciendo un breve análisis sobre el concepto primitivo para modelar la decisión individual o, de manera equivalente, sobre la representación de la información proporcionada por un criterio individual. Es muy común asumir mediciones numéricas para ambos casos, pero no tendría por qué ser así siempre. Examinaremos brevemente la conveniencia de tomar como concepto primitivo las preferencias sobre alternativas o las funciones de elección. En la sección 3 hacemos una introducción a la literatura de la teoría de elección

[1] Para una panorámica de la obra de Amartya Sen hasta el momento en que recibe el premio Nobel de Economía en 1998, puede consultarse Plata (1999).

social, señalando en forma somera el significado y alcance de dos de los resultados centrales: el teorema de imposibilidad de Arrow y el teorema de Gibbard-Satterwhite. Ambos resultados nos llevan a una imposibilidad lógica de diseñar reglas de elección colectiva o métodos generales de toma de decisiones multicriterio. Los resultados nos dicen que sólo un criterio prevalece o que un individuo, el dictador, decide por toda la sociedad. Esto se debe, en gran parte, al esquema universalista y al uso de información meramente ordinal y de ausencia de comparaciones que prevalece en las hipótesis de los entornos modelados por los teoremas. Entre las posibles salidas a los resultados negativos está la de incorporar supuestos sobre una mayor precisión en la medición, de cada criterio o preferencia individual, y en los supuestos sobre comparaciones admisibles entre las diferentes mediciones. Abordamos esto en la sección 4, haciendo una revisión de los tipos de escala de medición y su significado. Finalmente, en la sección 5 comentamos un resultado que nos permite clasificar las comparaciones lógicamente posibles, entre las diferentes mediciones individuales, para el caso en que las escalas individuales permiten hacer comparaciones de diferencias entre las alternativas. Cuando se redefinen los supuestos de Arrow especificando algún supuesto sobre medición *intra* medida y sobre COMPARACIÓN *entre* medidas, se generan reglas de decisión, colectivas o multicriterio, consistentes con los supuestos. Esto será materia de un trabajo posterior.

2. Concepto primitivo: preferencia o función de elección

Tradicionalmente, los modelos de decisión individual se han basado en el concepto de *preferencia* sobre el conjunto de alternativas. Ni siquiera las funciones de utilidad, representaciones numéricas de las preferencias, han sido necesarias para explicar la existencia de equilibrio general en un entorno de competencia perfecta. El uso de utilidades se ha hecho necesario en los tratamientos de decisiones bajo incertidumbre, en elecciones intertemporales o en la economía del bienestar. A pesar de que el concepto de preferencia ha sido central en la base de las teorías de decisión, ha surgido también un concepto primitivo alternativo con un fuerte contenido empírico. Me refiero al concepto de *función de elección*. Una función de este tipo nos dice cuál es la elección de un agente al enfrentar las distintas posibilidades de conjuntos de alternativas. El dominio de la función serían los posibles subconjuntos de alternativas y el rango los conjuntos de alternativas. La función deberá elegir algo que esté siempre en su conjunto factible. Una teoría de la decisión basada en funciones de elección parte de supuestos sobre propiedades de regularidad en dichas funciones, en lugar de partir de supuestos sobre las preferencias. La liga entre ambos tipos de supuestos es la idea de la conducta optimizante o *conducta racional,* como se le conoce.

Antes de continuar, conviene explicar un poco en qué consiste la idea de conducta racional y sus ventajas y limitaciones. La hipótesis de racionalidad de los agentes se toma casi siempre como el centro del análisis económico contemporáneo. Una posible razón para adoptarla es que de ella se derivan ciertas regularidades en los comportamientos individuales, algunas de las cuales pueden mantenerse en el agregado. Sin embargo, hay que ser consciente de que un comportamiento individual no tiene por qué mantenerse en el agregado, como veremos en la siguiente sección. Del mismo modo, puede haber comportamientos de agregados que no tienen por qué ser producto de explicaciones con base en conductas individuales racionales. Podría haber explicaciones de tipo estadístico o provenientes de argumentos dinámicos, por ejemplo. Sin embargo, la hipótesis de racionalidad de los agentes económicos tiene un papel tanto de carácter simplificador como de carácter unificador en la teoría económica, además de que es atractiva por su simplicidad y poder de predicción. Es difícil imaginar las consecuencias de una política económica impuesta en agentes impredecibles o que no saben lo que quieren. De este modo, la hipótesis de racionalidad aparece como sustento del diseño de criterios normativos. Asimismo, la prevención de la reacción de los agentes ante determinadas políticas deberá tener en cuenta el hecho de que los agentes responderán a las políticas en función de sus propios intereses. La hipótesis de racionalidad jugará en este caso un papel positivo de restricción ante el diseño de las políticas o instituciones de carácter público.[2] Detrás de cada análisis interesante sobre temas como eficiencia, equidad, justicia, pobreza o desigualdad habrá un concepto subyacente de racionalidad.

Nos interesa centrar la atención en dos aspectos que consideramos importantes como para tener en cuenta en todo análisis de las secciones posteriores. Se examinarán primero el uso de utilidades y los debilitamientos de

[2] Para un análisis más profundo, consúltese Barberá (1991).

la tradicional racionalidad transitiva. El segundo aspecto aborda la relación entre preferencias y funciones de elección a través del concepto de conducta racionalizable.

La hipótesis de racionalidad más aceptada consiste en suponer que:

a) El individuo tiene una preferencia completa y transitiva sobre el conjunto de alternativas.[3]

b) El individuo escoge lo mejor en cada conjunto factible, de acuerdo con sus preferencias.

Con el supuesto de la parte (a) se induce la transitividad de la indiferencia y de la parte estricta, así como la COMPARACIÓN de cualquier par de alternativas. Estas propiedades han sido criticadas en la literatura desde hace largo tiempo, debido a su carácter irreal en muchas situaciones.

La transitividad de la indiferencia se ha criticado argumentando motivos de percepción por parte del agente que toma las decisiones. Es perfectamente posible que el agente perciba x indiferente de y, y indiferente de z pero x preferido a z. Ver Armstrong (1950) y Luce (1956). El supuesto de COMPARACIÓN puede ponerse en duda en situaciones donde las alternativas son multidimensionales o simplemente por información incompleta o ignorancia por parte del agente. La suposición de transitividad de la parte estricta se ha criticado para el caso de las preferencias sociales, con el famoso ejemplo de la paradoja de la votación mayoritaria cíclica; se analizará en la siguiente sección. Creemos que la transitividad de la parte estricta no es un requisito demasiado restrictivo en el nivel de las preferencias individuales.

Han aparecido ciertos debilitamientos de los supuestos tradicionales de completitud y transitividad que nos conducen a conceptos que admiten indiferencias no transitivas. Entre ellos tenemos: semiórdenes, órdenes intervalo, órdenes parciales y preferencias casi transitivos. Todos ellos admiten indiferencia no

[1] R es completa si $\forall x, y \in X$: xRy ó yRx. R es transitiva si $\forall x, y, z \in X$: $(xRy$ y $yRz) \rightarrow xRz$.

transitiva pero conservan la transitividad de la parte estricta de la preferencia. Las preferencias acíclicas constituyen un debilitamiento más general pues admiten que tanto la indiferencia como la parte estricta puedan tener intransitividades. La aciclicidad sólo pide que no existan ciclos de preferencia estricta. Esto es importante desde el punto de vista de la decisividad ya que en los casos en que el conjunto de alternativas es finito, la condición de aciclicidad es equivalente a la existencia de elementos maximales para cada subconjunto de alternativas. Un elemento es maximal en un conjunto factible si no es dominado en la preferencia estricta por ningún otro elemento del conjunto factible. Puede haber varios maximales en un conjunto.[4]

Con las hipótesis de completitud y transitividad, para una preferencia del tipo "es al menos tan bueno como" es posible justificar la existencia de una función de utilidad para representar en forma numérica una preferencia racional en el sentido arriba expuesto.[5] Conviene notar que el resultado recíproco es también cierto. El uso de funciones de utilidad nos obliga a estar suponiendo implícitamente la completitud y transitividad de las preferencias. Ello se debe a que la relación "mayor o igual" de los números es completa y transitiva; de este modo, la relación de preferencia representada por una utilidad es necesariamente completa y transitiva para mantener la consistencia. En Plata (2003a) aparece una exposición más detallada sobre este hecho y las salidas alternativas.

Hemos anticipado ya que una función de elección es una función que elige una alternativa para cada posible subconjunto de alternativas enfrentado. Estas funciones pueden tomarse como primitivas para basar una teoría de la decisión estableciendo condiciones de regularidad sobre las mismas y obteniendo resultados a partir de ellas. En el caso de la teoría del consumidor, una función de elección nos especificaría un elemento del conjunto $B(\boldsymbol{p},w)=\{\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}/\,\boldsymbol{px}\leq m\}$, siendo m un

[4] Para un análisis sobre debilitamientos de la racionalidad tradicional y sus representaciones numéricas, consúltense Fishburn (1985), Subiza (1994), Bridges (1983a,b) y Plata (2003a,b).

[5] En la sección 4 se examinará con cierto detalle el significado y variedad de escalas de representación numérica. La existencia de utilidad en espacios con un número incontable de alternativas depende también de la hipótesis técnica de *continuidad,* que no viene al caso abordar aquí.

ingreso y $\boldsymbol{p}$ un vector de precios de las mercancías.[6] Las observaciones de conductas donde aparecen precios y cantidad elegida nos brindan parte de la función de elección de un consumidor y pueden utilizarse para contrastar la conducta racional. Consúltese Mas-Colell (1995) para el concepto de preferencia revelada relacionado con lo anterior y con lo que sigue en este apartado.

Con el objeto de ejemplificar ideas, consideremos que las alternativas son sólo tres, de modo que el conjunto de las mismas es $X=\{a,b,c\}$. Consideremos las siguientes funciones de elección.

Caso 1:

$\mathrm{Ch}(a,b,c)= b$ $\mathrm{Ch}(a,b)=b$ $\mathrm{Ch}(a,c)=c$ $\mathrm{Ch}(b,c)=b$ $\mathrm{Ch}(a)=a$ $\mathrm{Ch}(b)=b$ $\mathrm{Ch}(c)=c$.

Caso 2:

$\mathrm{Ch}(a,b,c)= b$ $\mathrm{Ch}(a,b)=a$ $\mathrm{Ch}(a,c)=c$ $\mathrm{Ch}(b,c)=b$ $\mathrm{Ch}(a)=a$ $\mathrm{Ch}(b)=b$ $\mathrm{Ch}(c)=c$.

Una pregunta interesante cuando se trabaja con funciones de elección consiste en ver si una función de elección es consistente con una preferencia determinada, es decir, si lo que la función elige es producto de una maximización sobre una preferencia dada. En tal caso, se dice que la conducta expresada en función de elección es una conducta *racionalizable.* En el caso 1 podemos ver que la mejor alternativa del individuo es la opción b; de entre las restantes tenemos que su tercera elección nos dice que c es preferido a la alternativa a. Hemos construido así el orden de preferencia bc a. La función de elección del caso 1 es consistente con este orden de preferencias, y tenemos una conducta racionalizable. En el caso 2 podemos ver que la conducta representada no corresponde a ninguna preferencia transitiva y completa. Se invita al lector a comprobarlo directamente.

[6] Es posible introducir que la función de elección sea en realidad una *correspondencia de elección,* admitiendo posiblemente más de una alternativa en el resultado y entendiendo que la decisión física será sólo una de ellas.

Esto nos abre la puerta a todo un mundo de modelación de conductas que no son racionales en el sentido tradicional. El texto de Mas-Colell y coautores nos brinda una buena introducción a este tipo de literatura. Dejamos hasta aquí esta sección pidiendo al lector tener en cuenta lo que en ella se expresa antes de interpretar de manera radical las conductas o políticas públicas observadas.

3. Algo de teoría de la elección social

El problema de decidir sobre un conjunto de alternativas posibles cuando éstas se ordenan con diferentes criterios es muy conocido. Diferentes aspectos del problema han sido abordados por economistas, politólogos, ingenieros, sociólogos, filósofos, etc. El problema se conoce como de agregación de preferencias en las ciencias sociales y como de toma de decisiones bajo diferentes criterios en otras disciplinas técnicas afines, como la investigación de operaciones o ciertos problemas de administración o ingeniería.

Por el lado de las ciencias sociales, se han buscado reglas de elección colectiva que satisfagan *criterios deseables* de agregación de preferencias. La base metodológica ha sido el método axiomático. Se consideran dominios amplios de reglas posibles y se intentan restringir mediante propiedades deseables (universalidad, respeto a la unanimidad, no dictatoriales, etc.). Ello ha conducido por un lado a resultados de imposibilidad, donde se prueba que no hay regla alguna que satisfaga en forma conjunta ciertos requisitos “razonables”; tal es caso del conocido teorema de Arrow o del teorema de Gibbard-Satterwhite. Por otro lado, se han generado también resultados elegantes de caracterización de ciertas reglas de agregación. Por citar dos ejemplos, tenemos por una parte el caso de las reglas utilitaristas y por la otra el caso de reglas más apegadas a la ética rawlsiana de la justicia social, como sería el caso de la regla leximin. Ambas reglas se comentarán más adelante.

Consideremos una sociedad de n individuos $N=\{1,2,...,n\}$ que deben tomar decisiones sobre un conjunto de alternativas que denotaremos como X. Cada individuo tiene una preferencia completa y transitiva sobre X. Arrow considera que las valoraciones de las alternativas tanto a nivel individual como social están dadas por órdenes de preferencia transitivos y completos. Se preocupa por obtener reglas que asocien un orden social sobre X a cada posible arreglo de preferencias individuales sobre X. Estos arreglos individuales se conocen como perfiles de preferencia. Asimismo, Arrow piensa que las reglas sólo deben considerar las características de orden de las preferencias y que deben respetar la unanimidad. Una lectura simplista de su resultado nos dice que es imposible satisfacer de manera simultánea estos requisitos.

Con el objetivo de no parecer demasiado simplistas, ofrecemos la formalización del resultado. Empezaremos especificando el esquema clásico de Arrow y después abordaremos las modificaciones que se le han hecho.

Cada individuo tiene una preferencia R_i sobre el conjunto de alternativas. Un *perfil* de preferencias es un arreglo $(R_1,...,R_n)$ que especifica una preferencia para cada individuo. El problema fundamental consiste en encontrar una preferencia social R que, de alguna manera, constituya un buen agregador de las preferencias individuales. Suponemos que tanto las R_i como R son preferencias completas y transitivas. Históricamente, la regla de mayoría se ha considerado como un buen agregador de preferencias individuales. Cuando el número de alternativas es al menos tres, la regla de mayoría presenta dificultades. El caso clásico que ilustra esto lo constituye la llamada *paradoja de la votación* debida a Condorcet (1785). Considérese una sociedad con tres individuos y tres alternativas: $N=\{1,2,3\}$ y $X=\{x,y,z\}$.

Las preferencias de lo individuos son como sigue:

$$x \succ_1 y \succ_1 z \qquad y \succ_2 z \succ_2 x \qquad z \succ_3 x \succ_3 y$$

donde $\succ_i$ es la preferencia del agente i.

Con la aplicación de la regla de mayoría, se tiene que la preferencia social $\succ$ debe satisfacer:

$x \succ y$ puesto que los señores 1 y 3 derrotan dos votos contra uno al señor 2

$y \succ z$ puesto que los señores 1 y 2 derrotan dos votos contra uno al señor 3

$z \succ x$ puesto que los señores 2 y 3 derrotan dos votos contra uno al señor 1.

Así pues, la aplicación de la regla de mayoría puede generar ciclos en la preferencia social, perdiéndose la transitividad del orden social. El problema con esto es que una sociedad como la descrita en el ejemplo no puede tomar una mejor alternativa, ya que cualquier opción es dominada por otra.

Pensando en evitar el problema de la mayoría cíclica, Arrow impone que la preferencia social sea completa y transitiva. Eso se hace en forma implícita al considerar que el codominio de las reglas de elección colectiva es el conjunto $\mathfrak{R}$ de preferencias completas y transitivas sobre X. Las reglas de elección colectiva son funciones que van del conjunto de perfiles $\mathfrak{R}^n$ en $\mathfrak{R}$. Con $F(R_1,...,R_n)$ se denota el orden social asociado al perfil $(R_1,...,R_n)$. Usaremos también R, P e I, siendo $R=F(R_1,...,R_n)$ y P e I sus partes estricta y de indiferencia respectivamente.[7]

Condición T (Transitividad del orden social)

Las reglas de elección colectiva son funciones $F:\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$.

Una condición mínima es el respeto a las decisiones por *unanimidad*. Si todo mundo piensa que x es mejor que y, la preferencia social debe respetar que x es mejor que y.

Condición P (Condición débil de Pareto o unanimidad)

Para todo perfil $(R_1,...,R_n)$, para cualesquier alternativas $x,y \in X$: Si $xP_i\, y$ para cada $i \in N$ entonces xPy, donde P es la parte estricta de $F(R_1,...,R_n)$.

Otra condición muy razonable es que el orden social refleje los gustos de todos los individuos y no los de un individuo en particular, quien podría imponer su preferencia individual como preferencia social. Esta condición se enuncia como sigue.

[7] xPy se define como (xRy y no yRx); xIy se define como (xRy y no yRx).

Condición ND (no dictatorial)

No existe un individuo $i \in N$ tal que para todo perfil $(R_1,...,R_n)$ y para cualquier par de alternativas $x,y \in X$ se tenga que $xP_i\, y$ implique xPy, siendo P la parte estricta de $F(R_1,...,R_n)$.

Una regla F es *dictatorial* cuando existe un individuo i tal que para cualquier perfil y para cualquier par de alternativas $x,y \in X,$ si él prefiere estrictamente x contra y entonces la preferencia social dice que x es preferido estrictamente a y.

Una condición aparentemente inofensiva es la que en realidad exige más, y es en ella que radica toda la fuerza del resultado. La condición impone que el orden social entre dos alternativas sólo debe depender de cómo ordenan los individuos esas dos alternativas, y debe ser independiente de cómo los individuos ordenan el resto de las alternativas. De este modo se evitan de entrada reglas como el conteo de Borda, ya que a dos perfiles que ordenen igual un par de alternativas les debe corresponder el mismo orden social respecto a esas dos alternativas.

Condición IIA (Independencia de alternativas irrelevantes)

Para cualquier par de perfiles $(R_1,...,R_n)$ y $(R_1',...,R_n')$, para cualesquier $x,y \in X$: si $xR_i y$ si y sólo si $xR_i' y$ para cada $i \in N$ entonces xRy si y sólo si $xR'y$, donde R y R' son los órdenes sociales asociados a $(R_1,...,R_n)$ y $(R_1',...,R_n')$, respectivamente.

Si tanto $(R_1,...,R_n)$ como $(R_1',...,R_n')$ coinciden en su restricción a x, y entonces los órdenes sociales respectivos deben coincidir en su restricción a x, y; es decir, sólo interesan los ordenamientos individuales para el ordenamiento social. El resultado de Arrow nos dice simplemente que es imposible que se cumplan de manera simultánea todas las condiciones anteriores.

Teorema de imposibilidad (Arrow [1951,1963]).

No hay una regla F que satisfaga en forma simultánea las condiciones T, P, IIA y ND. De manera equivalente, cualquier $F:\mathfrak{R}^v \rightarrow \mathfrak{R}$ *que satisfaga las condiciones débil Pareto e independencia de alternativas irrelevantes es necesariamente dictatorial.*

En la búsqueda de salidas al resultado de Arrow se han modificado tanto las propiedades de las reglas admitidas como el mismo esquema arroviano, tanto en el dominio como en el codominio de las reglas. Por el lado del codominio, se ha relajado la racionalidad colectiva exigida inicialmente por Arrow (órdenes sociales completos y transitivos) a situaciones con preferencias colectivas transitivas sólo en su parte estricta (cuasitransitivas) y casos donde sólo se impone que la preferencia colectiva no genere ciclos de preferencia estricta (preferencias acíclicas). Se han generado diferentes estructuras de reparto de poder entre los individuos para cada relajamiento de la racionalidad colectiva. Se ha trabajado también con funciones de elección en el codominio en lugar de hacerlo con relaciones de preferencia sobre las alternativas.[8]

El dominio de las reglas admitidas por Arrow se ha visto también enriquecido considerando funciones de utilidad sobre las alternativas, en lugar de simples órdenes de preferencia sobre las mismas. Esto incorpora el uso de información cardinal y admite modelar la realización de comparaciones entre los individuos para diseñar los métodos de agregación. Esta vía ha sido muy fructífera y ha permitido caracterizar diversas reglas tradicionales de agregación, entre ellas las utilitaristas y el criterio maximin de Rawls (1971). En las siguientes secciones se analizan las bases de este tipo de tratamientos.

El criterio maximin (Sen [1976, 1977b]) funciona como sigue. Cada individuo establece la utilidad que obtendría con cada alternativa en caso de elegirse ésta. Se escogen las alternativas cuyo menor nivel de utilidad garantizado por ellas sea mayor o igual al menor nivel de utilidad garantizado por todas las

[8] Para una reseña de esta literatura puede consultarse Plata (1998) o los resultados originales en Mas, Colell y Sonneschein (1972) y en Blair y Pollack (1984).

demás. En otra palabras, para cada alternativa obtenemos el menor nivel de utilidad que alcanza entre los individuos y elegimos las que maximicen estos niveles. De este modo, damos el poder de decisión social al individuo peor situado. Es evidente que este criterio supone que estamos comparando los niveles de utilidad de los individuos entre sí. La explicación de esta afirmación quedará clara en la sección 5. El criterio utilitarista se origina en Bentham (1789) y se formaliza por primera vez en Harsanyi (1955). Cada individuo proporciona su función de utilidad como en el método anterior. Para cada alternativa se considera la suma de los niveles de utilidad sobre los individuos y se elige la alternativa con mayor nivel de utilidad agregado. Las decisiones sociales con este criterio no consideran la distribución del bienestar; sólo interesa el bienestar acumulado por el total de individuos. Notamos también que este criterio usa asimismo comparaciones de diferencias entre los individuos.

Se ha estudiado también la agregación sobre ciertos subconjuntos relevantes de preferencias, como las preferencias cuasilineales o las unimodales, en lugar de considerar todo el posible dominio. Se generan con ello reglas interesantes para contextos de aplicación no universalista.

En lo que sigue comentamos un poco sobre la introducción del carácter estratégico de los agentes a la hora de diseñar métodos de elección colectiva. Consideremos de nuevo el ejemplo de Condorcet. Supongamos que elegimos un orden de votación de modo que z entra al último. Es decir, primero se vota x o y y la alternativa ganadora compite con z. Si todos votan según su verdadera preferencia, resulta que gana z. Ésta es la peor alternativa para el agente 1. Si el señor 1 miente en la primera ronda, manifestando y mejor que x, forzará a que gane y; en la segunda ronda se tendrá que y derrota a z, obteniéndose finalmente una mejor opción para el señor 1. El concepto presentado en este ejemplo se conoce con el nombre de *manipulabilidad.* Un agente manipula una regla cuando el hecho de no declarar su verdadera preferencia hace que la aplicación de la regla le genere un mejor alternativa final que cuando declara la verdad.

Se han introducido también otras propiedades deseables para las reglas de agregación, diferentes de las exigidas inicialmente en el esquema arroviano. Con la introducción del concepto de *manipulabilidad* de un método de agregación se ha incursionado en problemas de diseño de mecanismos y de teoría de incentivos, acercando de este modo la teoría de elección social a otras áreas afínes y más conectadas directamente con la economía. Cuando una regla de agregación se quiere aplicar a una determinada situación, hay que conocer con exactitud el punto del dominio de la regla que representa las características de los agentes. Esto nos conduce a que los agentes nos revelen sus verdaderas características, las cuales podrían ser información privada y un agente puede no tener incentivos para revelarla si no le es provechoso al momento de implantar la regla. Siguiendo el esquema de Arrow pero imponiendo un requisito distinto a las reglas, Alan Gibbard (1973) y Mark Satterwhite (1975) obtienen en forma simultánea un nuevo resultado de imposibilidad que considera los aspectos estratégicos mencionados arriba. La formalización es la siguiente.

Una *función de elección social* es una función $f{:}P^n \rightarrow X$ que asocia una alternativa a cada perfil de preferencias.

$$Im(f)=\{x\in X / \ \exists(P_1,P_2,\ldots,P_n)\in P^n \text{ tal que } f(P_1,P_2,\ldots,P_n)=x\}$$

f es *dictatorial* si existe un individuo I tal que para cualquier perfil $(P_1,P_2,\ldots,P_n)$, el resultado de la función coincide siempre con la mejor alternativa I en la imagen de f:

$$\exists i\in N\text{: } \forall(P_1,P_2,\ldots,P_n) \text{ sucede que } f(P_1,P_2,\ldots,P_n)=C(P_i,Im(f))$$

donde $C(P_i,Im(f))$ es lo elegido en la $Im(f)$ con la preferencia P_i.

f es *manipulable* si existen I, $(P_1,\ldots,P_i,\ldots,P_n)$ y P_i' tales que

$$f(P_1,\ldots,P_i,\ldots,P_n)P_i f(P_1,\ldots,P_i',\ldots,P_n)$$

Teorema (Gibbard [1973], Satterthwaite [1975]).

Sea $f{:}P^n \rightarrow X$ *con imágenes de al menos tres elementos. Si* f *es no manipulable, entonces* f *es dictatorial.*

Terminamos esta sección ofreciendo bibliografía sobre la teoría de la elección social. Entre los artículos panorámicos sobre el tema destacan los de Sen (1977a, 1986, 1995), Barberá (1977, 1984a, 1984b), Plata (1998) y Villar (1988). Entre los pocos textos de la teoría destacamos el de Sen (1970) que, a pesar de haber sido ampliamente superado es muy digno de leerse como introducción al tema. Los de Fishburn (1973) y Kelly (1979) son bastante técnicos y un tanto áridos, pero en su momento constituyeron recopilaciones muy completas. El de Kelly (1988) es un libro muy bien diseñado e ideal para llevar un curso debido a la gran cantidad de ejercicios que presenta. En Kelly (1991) aparece una muy buena recopilación de bibliografía sobre el tema.

4. La medición y las escalas

Comenzamos fijando algunos términos técnicos para evitar confusiones. Una *estructura* es un conjunto de objetos sobre los que se tienen definidas ciertas relaciones numéricas o empíricas, según sea el caso. La relación numérica de mayor uso es la relación “menor que” o la de “mayor o igual” o equivalentes, que se define por lo general sobre el conjunto de los números reales. Como ejemplos de estructuras y relaciones empíricas tenemos la relación “tiene más masa que”, “es más pesado que”, “tiene más volumen que” en el conjunto de cuerpos u objetos físicos. Otros ejemplos podrían ser “tiene más edad que”, “es más pobre que”, “es más preferido que”, “está más contaminado que”, “es menos costoso que”, “es más arriesgado que”, “tiene un mayor rendimiento promedio que”, “tiene más experiencia que”, “tiene más estudios que”, etc. Los ejemplos y dominios o estructuras empíricas de aplicación son muy ricos y variados.

Estas relaciones empíricas suelen cuantificarse en forma numérica, pero es ahí donde hay que tener cuidado con el significado e interpretación de las medidas.

La medición de una estructura empírica consiste en la asignación de números a los objetos empíricos, de manera que las comparaciones empíricas entre objetos se vean reflejadas mediante comparaciones numéricas entre números en la estructura de los números reales. Esto significa que parte del universo empírico en estudio se ha reflejado en una estructura numérica. En términos técnicos, decimos que el proceso de medición es un proceso a través del cual un universo de objetos y relaciones empíricas (estructura empírica) se transforma mediante una función, la medición, en una estructura numérica.

De este modo, las relaciones empíricas se convierten en relaciones numéricas a las que se puede sacar mucho provecho si las analizamos con las técnicas y herramientas de la matemática. Así, podemos obtener información que es posible regresar e interpretar en el universo empírico. El uso de las herramientas matemáticas ha sido más intensivo en las ciencias naturales que en las ciencias sociales; en estas últimas se está dando una creciente matematización, que ha permitido tener una mejor visión de la naturaleza de los problemas sociales y que sugiere puntos de vista de mucha potencialidad.

Entrando ya en materia, conviene preguntarnos: ¿Cualquier representación numérica nos arrojará las mismas conclusiones para el universo empírico? ¿Qué ocurre si tomamos una medición "muy similar" a otra y ambas nos arrojan resultados contradictorios? ¿Tiene sentido comparar resultados numéricos obtenidos para diferentes características o criterios? Para dilucidar estas cuestiones es importante hacer supuestos: (1) sobre los tipos o grados de medición de una característica o criterio, y (2) sobre la posibilidad de comparar o no y a qué nivel, las mediciones obtenidas con diferentes criterios.

La escala con la que se mide un criterio o característica nos dice qué tan fina es la medición; esto es muy importante para delimitar las interpretaciones y el tipo de cálculos que es válido aplicar a una variable, pues los resultados en que se apoye alguna decisión dependen fuertemente de los supuestos sobre las escalas de medición. A manera de ejemplo, consideremos las siguientes afirmaciones:

A: "Juan tiene el doble de utilidad cuando se come cuatro manzanas de 100 gramos que cuando se come sólo dos manzanas de 100 gramos."

B: "Cuatro manzanas de 100 gramos cada una tienen el doble de masa que dos manzanas de 100 gramos cada una."

En ambas afirmaciones estamos hablando de una medición de dos objetos empíricos: el objeto "dos manzanas de 100 gramos" y el objeto "cuatro manzanas de 100 gramos". En la afirmación **A** se habla del concepto económico de *utilidad* y en la afirmación **B** del concepto de masa de la física. A pesar de que se dice esencialmente lo mismo sobre ambas mediciones, que una es el doble de la otra, los significados son muy distintos pues **A** es una afirmación sin sentido en la teoría del consumidor y **B** es una afirmación cierta en la física y en la vida diaria. La diferencia radica en que el concepto de masa es más fino que el de utilidad y exige un mayor grado de discriminación al medir objetos que lo que se exige para la utilidad. El concepto de utilidad se mide en escala ordinal y el de masa en una escala de razón. En el ejemplo anterior, los juicios se hacen sobre la medición de una característica o de un criterio o sobre una característica de un individuo.

También aparecen juicios en que usamos varias mediciones individuales para compararlas entre diferentes individuos o para realizar comparaciones entre criterios. Las mediciones de diferentes características suelen "agregarse" en índices que resumen en un número abundante información que permite aseverar juicios como los siguientes:

C: "El nivel de contaminación de la ciudad de México supera el nivel de contaminación de la ciudad de Monterrey en un 50%."

D: "La diferencia que existe en el índice de desarrollo humano entre Francia y Alemania es mayor que la que existe entre México y Estados Unidos."

E: "El IQ promedio de los europeos duplica el promedio del IQ de los estadounidenses."

En los casos anteriores, los conceptos de medición referidos son los niveles de contaminación, el índice de desarrollo humano y el índice de nivel intelectual, respectivamente. Es muy importante especificar el supuesto de medición intra admitido en cada concepto para saber qué juicios tienen sentido y cuáles no lo tienen.

Para entender mejor los grados de medición y su modelación, es bueno considerar los casos extremos. Las mediciones más burdas son las clasificaciones. A las alternativas equivalentes se les asocia el mismo número sin darle ningún significado a la ordenación ni a las comparaciones numéricas. Si $u(\,)$ representa una *medición clasificatoria*, cualquier transformación $\varphi(\,u(\,))$ con φ biyectiva serviría para los mismos fines. En el extremo opuesto se encuentran las *mediciones exactas*; en estos casos la función $u(\,)$ no tiene ninguna representación equivalente, y φ coincide con la identidad. Un grado de medición intermedio y un tanto más preciso son las *mediciones ordinales*, mediante las cuales dos mediciones son equivalentes si clasifican y ordenan igual el conjunto de alternativas. En este caso la φ que permite buscar mediciones equivalentes se restringe a las transformaciones monótonas crecientes. Con este tipo de medición sólo es posible hacer juicios sobre COMPARACIÓN de ordenación pero no sobre intensidad, niveles absolutos o COMPARACIÓN de diferencias de medición entre alternativas. Las mediciones cardinales son más finas que las ordinales al admitir invarianza sólo bajo transformaciones crecientes afines. Los conceptos de temperatura en la física y de utilidad von Neumann-Morgenstern en la teoría de decisiones bajo incertidumbre son ejemplos clásicos cuya medición es cardinal.

Tipo de Escala	**Ejemplos**	**Cambios admisibles con funciones**
Nominal o clasificatoria	Clave lada, numeración de planes alternativos, número de jugador en futbol, sexo, raza, tipo de sangre, religión, etc. "ETIQUETAN-CLASIFICAN"	uno - uno
Ordinal	Grados militares, grados de dureza de los objetos, calidad del aire, alfabeto, utilidad del consumidor de competencia perfecta. "CLASIFICAN Y JERARQUIZAN"	crecientes
Cardinal o intervalo	Temperatura en °C ó °F, latitud, longitud, tiempo, tiempo calendárico, unidades monetarias, rendimientos, aversión. "ANTERIOR + DEFINEN INTERVALO PARA COMPARAR"	afines
Ratio o escala cociente	Peso físico, ingreso mensual de familia, porcentaje de CO_2/m^2, árboles por km^2, temperatura en escala kelvin, PIB, desempleo. "ANTERIOR + HAY CERO ABSOLUTO Y COMPARAN TASAS"	afines lineales
Absoluta o exacta	Contar objetos	identidad

El estudio de temas como el de la medición, la toma de decisiones bajo incertidumbre o la optimización convexa no era conocido por la mayoría de los matemáticos profesionales hasta que la necesidad impuesta por las ciencias sociales provocó muchos de los actuales desarrollos. En la actualidad contamos ya con los tres excelentes volúmenes de la obra *Theory of Measurement* de David Krantz, Patrick Suppes, Amos Tversky y Duncan Luce. Es muy digna de destacar también *Foundations of Measurement,* de Fred Roberts. En estos trabajos se pueden consultar los fundamentos lógico-matemáticos de la teoría de la representación de estructuras empíricas en estructuras numéricas.

5. Comparación entre mediciones cardinales

Cuando se quiere decidir entre dos alternativas, x e y por ejemplo, generalmente se dispone de una *medición* que permite ordenar las dos alternativas de acuerdo con cada preferencia o criterio involucrado. Si hay n preferencias o criterios, diremos que $u_i(z)$ es la valoración de la alternativa z por parte de la preferencia o criterio i. Por lo general, en todas las aplicaciones se trabaja con información numérica de este tipo para realizar los análisis de las alternativas y tomar decisiones.

Cuando cada medición individual se reporta mediante información cardinal, podemos hacer comparaciones de diferencias a nivel de cada criterio. Desde el punto de vista formal, esto significa que la medición $u(\,)$ o la medición $a+bu(\,)$ con b positivo son equivalentes ya que ambas preservan los juicios sobre la COMPARACIÓN de diferencias. Podemos también clasificar las maneras lógicamente posibles de realizar comparaciones entre las medidas de los diferentes criterios. En esencia, se trata de caracterizar las distintas formas de inducir particiones, mediante relaciones de equivalencia, en el espacio de los *perfiles de medición*. Un elemento típico de este espacio es un arreglo $(u_1(\,),...,u_n(\,))$ donde aparecen las n mediciones de las preferencias o de los diferentes criterios en cuestión. Un arreglo de este tipo se conoce como perfil. En la literatura de teoría de la elección social se han estudiado algunos de los casos de COMPARACIÓN que aparecen aquí y que lo hacen por lo general como casos extremos en nuestra clasificación.[9] En lo que sigue presentamos de manera formal el resultado e introducimos dos ejemplos al final.

Consideremos de nuevo X, el espacio de alternativas. Con $(u_1(),...,u_n())$ representamos un perfil de mediciones cardinales; cada $u_i()$ es una función de X en los números reales. U^n es el espacio de perfiles de mediciones cardinales. Nuestro objetivo es estudiar las particiones de este conjunto. Para ello, consideremos el conjunto universal de posibles transformaciones cardinales admisibles.

$$A = \{(\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t)) / \ \forall\ i \in N\ \exists\ a_i \in \mathbf{R}\ \exists\ b_i > 0 : \phi_i(t) = a_i + b_i t\}$$

Sean $\psi \subseteq A$, $u = (u_1,\ldots,u_n)$ y $v = (v_1,\ldots,v_n)$ en U^n; decimos que ***u* y *v* son ψ- equivalentes** si existe $\phi \in \psi$ tal que $v = \phi o u$, donde $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_n)$.

Identifiquemos ahora cada subconjunto de transformaciones admisibles y con un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ ′ $\mathbf{R}^n_{++}$ de la siguiente manera:

$$f: A \rightarrow \Re^n \text{ X } \Re^n_{++} \text{ tal que: } f(a_1+b_1t,\ldots a_n+b_nt) = ((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)).$$

La relación de ψ-equivalencia no es siempre una relación de equivalencia en U^n para todo ψ.[10] Se requiere que se cumplan:

(C1) $\phi = I_d \in \psi$ (reflexividad)

(C2) Si $\phi \in \psi$ entonces $\phi^{-1} \in \psi$ (simetría)

(C3) Si $\phi \in \psi$, $\phi \in \psi$ entonces $\phi o \phi' \in \psi$ (transitividad)

(C1)-(C3)

Los requisitos anteriores son equivalentes a

[9] Ver por ejemplo los trabajos de Roberts (1980a,b), d'Aspremont (1985), Bossert y Weymark (1999) o Plata (1994).

[10] Consultar el capítulo segundo de Plata (1994) para detalles.

(R1) $(\mathbf{0},\mathbf{1}) \in f(\psi)$.

(R2) Si $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in f(\psi)$, entonces $(\mathbf{-ab^{-1}}, \mathbf{b^{-1}}) \in f(\psi_p)$.

(R3) Si $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in f(\psi)$ y $(\mathbf{c},\mathbf{d}) \in f(\psi)$, entonces $(\mathbf{a}+\mathbf{bc},\mathbf{bd}) \in f(\psi)$

donde **0** es el vector de ceros y **1** es el vector de unos.

Si $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_n)$, $\mathbf{b^{-1}} = (b_1^{-1},\ldots,b_n^{-1})$, $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_n)$, y $\mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_n)$; entonces $\mathbf{bd}=(b_1d_1,\ldots,b_nd_n)$

Denotemos: $(\mathbf{a},\mathbf{b})^{-1}$ º $(\mathbf{-ab^{-1}} , \mathbf{b^{-1}})$

$(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c},\mathbf{d})$ º $(\mathbf{a}+\mathbf{bc} , \mathbf{bd})$

Decimos que ψ es un *conjunto consistente de transformaciones* si $f(\psi)$ satisface las condiciones (R1)-(R3). Introducimos también una condición de regularidad.

Condición CSI

$F(\psi_p)$ es un cono convexo

Esto implica que $f(\psi)$ satisface:

(1) Si $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in f(\psi)$, $(\mathbf{c},\mathbf{d}) \in f(\psi_p)$, entonces $(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}+\mathbf{d}) \in f(\psi)$.

(2) Si $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in f(\psi)$ y $\lambda > 0$, entonces $(\lambda\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}) \in f(\psi)$.

Lo anterior significa simplemente que las escalas se miden de manera continua, a través de números reales, y que no hay restricción alguna admitiéndose cualquier medida entre cero e infinito. Para enunciar el resultado que caracteriza las particiones consistentes necesitamos introducir la siguiente notación, donde nos fijamos en las coordenadas de vectores de transformación que permiten comparaciones de porcentajes a partir de un cero absoluto.

$$A_0(\psi) \equiv \{h \in N / a_h = 0 \text{ para todo } (\mathbf{a},\mathbf{b}) \in f(\psi)\}$$

Particiones consistentes

Consideremos $\psi \subseteq A$ y una “partición” de N:

$\pi_1 = \{ A_0(\psi), A_1,\ldots,A_r\}$ $\pi_2 = \{N_1,\ldots,N_k\}$ con $A_0(\psi)$ posiblemente vacío.

Sean $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \Re^n X \Re^n_{++}$, x es un real arbitrario y z un real positivo, $Aj \in \pi_1$ con $A_j \neq A_0(\psi)$ y $N_i \in \pi_2$, denotamos:

$(x \mid A_j, \mathbf{a} \mid N\backslash A_j) \equiv$ el vector que coincide con **a** en los índices correspondientes a $N\backslash A_j$ y que tiene el real x en todas las coordenadas de los índices correspondientes a A_j.

$(z \mid N_i, \mathbf{b} \mid N\backslash N_i) \equiv$ el vector que coincide con **b** en los índices correspondientes a $N\backslash N_i$ y que tiene el real z en todas las coordenadas de los índices correspondientes a N_i.

Definición 1

Decimos que (π_1,π_2) *satisface la igualdad interna de coordenadas para* $f(\psi)$ si para cualquier $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in f(\psi_p)$, $A_j \in \pi_1$, $N_i \in \pi_2$ se tiene que las coordenadas de **a** correspondientes a índices en A_j son todas idénticas entre sí, y las coordenadas de **b** correspondientes a índices en N_i son también iguales entre sí.

Definición 2

Decimos que (π_1,π_2) *satisface la independencia de escala interna para* $f(\psi)$ si para cualquier $(\mathbf{a,b}) \in f(\psi)$, $A_j \in \pi_1$, $A_j \neq A_0(\psi)$, $N_i \in \pi_2$, $x \in \Re$, $z > 0$ tenemos que:

$$((x \mid A_j, \mathbf{a} \mid N \backslash A_j), (z \mid N_i, \mathbf{b} \mid N \backslash N_i)) \in f(\psi.)$$

Definición 3

Decimos que π_1 es *más refinada* que π_2 en $N \backslash A_0 (\psi)$ si para toda $A_j \in \pi_1$ con $A_j \neq A_0 (\psi)$ tenemos que existe $N_i \in \pi_2$ tal que $A_j \subseteq N_i$.

Definición 4

Sean $\pi_1 = \{A_0(\psi_p), A_1,\ldots,A_r\}$ y $\pi_2 = \{N_1,\ldots,N_k\}$ particiones de N. Decimos que (π_1, π_2) *es una doble partición de COMPARACIÓN parcial inducida por* $f(\psi)$ si:

(i) (π_1, π_2) satisface la igualdad interna de coordenadas para $f(\psi)$.

(ii) (π_1, π_2) satisface la independencia de escala interna para $f(\psi)$.

(iii) π_1 es más refinada que π_2 en $N \backslash A_0(\psi)$.

Teorema

Sea $\psi \subseteq A$ *y supongamos que* $f(\psi)$ *satisface la condición* (*CSI*) . *Entonces* ψ es *consistente si y sólo si* $f(\psi)$ *induce a doble partición de COMPARACIÓN parcial.*

Ejemplo de partición consistente: (N={1,2,3,4})

π_1 = {{1,3},{2},{4}} ; π_2 = {{1},{2,3,4}}

(**a**,**b**) = ((a,b,c,c), (d,d,e,e)) $A(\psi_p)$ = {1,3.}

La primera clase de π_1 muestra los índices de los individuos cuyas transformaciones admisibles en ψ siempre tienen cero, como ordenada al origen, en la transformación admisible. Si admitimos que una regla de elección colectiva permita el tipo de COMPARACIÓN reflejada en este ejemplo, ello significa que:

-Podemos hacer comparaciones de porcentajes a nivel interno en las dos primeras medidas. No podemos comparar porcentajes entre ellas.

-Podemos realizar comparciones de diferencias tanto a nivel interno como entre ellas para las mediciones dos, tres y cuatro. No podemos comparar estas diferencias con las del criterio uno.

Ejemplo de partición inconsistente:

π_1 = {{1,3},{2,4}} ; π_2 = {{1},{2,3},{4}}

(**a**,**b**) = ((0,a,0,a),(b,c,c,d)) $A_0(\psi_p)$ = {1,3}.

Si admitimos este conjunto de transformaciones para realizar comparaciones, tendríamos inconsistencias en la toma de decisiones debido a que no hay una partición del conjunto de perfiles de medición pues no se cumple el tercer requisito. En concreto:

(**a**,**b**)(**a**,**b**) = ((0,a+ac,0,a+ad),(b^2,c^2,c^2,d^2))

Así, el requisito (R3) no se satisface y la COMPARACIÓN social carecería de transitividad.

Conclusión

A manera de conclusión, podemos decir con seguridad que los problemas de las ciencias sociales han motivado ciertos desarrollos de la matemática que a su vez han proporcionado nuevos resultados que abren interesantes preguntas. La matematización de un problema no significa simplemente asociar números a éste, como a veces se entiende en las sociedades con poca cultura matemática; significa el acceso al universo de objetos matemáticos que se rigen con ciertas leyes precisas mediante las cuales se pueden representar aspectos de la realidad empírica que, una vez analizados en el modelo matemático, pueden regresarse e interpretarse en el universo empírico. El problema de encontrar qué tipo de regla social es consistente con cada uno de los supuestos de medición del resultado anterior es un problema aún abierto. En la literatura comentada hay varios resultados parciales. Conviene consultar el trabajo de Bossert y Weymark (1998) para una panorámica de los resultados logrados hasta la fecha.

Bibliografía

Armstrong, W. E. "A Note on the theory of consumer's behavior", *Oxford Economic Papers*, núm. 2, 1950, pp. 119-122.

Arrow, K. *Social Choice and Individual Values*, Wiley and Sons, New York, 1951, 1963.

Barberá, S. "Desarrollos recientes en la teoría de la Elección social", *Hacienda Pública Española*, núm. 44, 1977, pp. 269-274.

Barberá, S. "Teoría DE la elección social: algunas líneas de desarrollo", *Hacienda Pública Española,* núm. 91, 1984a, pp. 221-224.

Barberá, S. "El análisis de incentivos en economía normativa", *Revista Española de Economía*, núm. 1 (2ª época), 1984b, pp. 99-131.

Barberá, S. "Algunos modelos de comportamiento racional en economía", en: R. Marimón y X. Calsamiglia. *Invitación a la teoría económica*, Ariel, Barcelona, 1991.

Barberá, S., P. Hamond y Ch. Seidl (eds.). *Handbook of Utility Theory*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

Blair, D. H. y R. A. Pollack. "Aciclic collective choice rules", *Econometrica*, núm. 50, 1982, pp. 931-944.

Bossert, W. y J. A. Weymark. "Utility and social choice", en Barberá, S. P. Hamond y Ch. Seidl (eds.). *Handbook of Utility Theory*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

Bridges, D. S. "A numerical representation of preferences with intransitive indifference", *Journal of Mathematical Economics*, núm. 11, 1983a, pp. 25-44.

Bridges, D. S. "Numerical representation of intransitive preferences on a countable set", *Journal of Economic Theory*, núm. 30, 1983b, pp. 213-217.

d'Aspremont, C. "Axioms for social welfare orderings", en : L. Hurwickz, D. Schmeidler y H. Sonnenschein (eds.). *Social Goals and Social Organization,Essays in Memory of Elisha Pazner*, Cambridge University Press, New York, 1985.

Fishburn, P. C. *The Theory of Social Choice*, Princeton, Princeton University Press, 1973.

Fishburn, P. C. *Interval Orders and Interval Graphs*, Wiley, New York, 1985.

Harsanyi, J. C. "Cardinal welfare, individualistic ethics and interpersonal comparisons of utility", *Journal of Political Economy*, núm. 63, 1955, pp. 309-321.

Kelly, J. S. *Arrow Impossibility Theorems*, Academic Press, New York, 1979.

Kelly, J. S. "Social choice bibliography", en *Social Choice and Welfare*, núm. 8, 1991, pp.97-69.

Krantz, D. H., R. D. Luce, T. Suppes y A. Tversky. *Foundations of Measurement, vol.1: Additive and Polynomial Representations*, Academic Press, New York, 1971.

Mas-Colell, A. y H. Sonnenschein. "General Possibility Theorems for group decisions", *Review of Economic Studies*, núm. 3, 1972, pp. 185-192.

Mas-Colell, A., M. Whinston y J. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, Londes, 1995.

Plata, Leobardo. "Amartya Sen y la economía del bienestar", en *Estudios Económicos*, vol. 14, núm. 1, 1999, pp. 3-31.

Plata, Leobardo. "Debilitamientos de la racionalidad transitiva e invarianza de las representaciones numéricas de preferencias", mimeo, 2003a.

Plata, Leobardo. "A numerical representation of acyclic preferences when non-comparability and indifference are concepts with different meaning", *Econoquanta* (de próxima aparición).

Rawls, J. *A Theory of Justice*, Harvard University Press, Cambridge, y Clarendon Press, Oxford, 1971.

Roberts, F. S. *Foundations of Measurement*, Academic Press, New York, 1979.

Roberts, K. W. S. "Possibility theorem with interpersonally comparable welfare levels", *Review of Economic Studies*, vol. 2, núm. 47, 1980a, pp. 409-420.

Roberts, K. W. S. "Interpersonal comparability and social choice theory", *Review of Economic Studies,* vol. 2, núm. 47, 1980b, pp. 421-439.

Sen, A. K. *Collective Choice and Social Welfare*, Holden Day, San Francisco, 1970.

Sen, A. K. "Social choice theory: A re-examination", *Econometrica*, núm. 45, 1977a, pp. 53-89.

Sen, A. K. "On weights and measures: Informational constraints in social welfare analysis", *Econometrica*, núm. 45, 1977b, pp. 1539-1572.

Sen, A. K. "Interpersonal comparisons in welfare", en: M. Boskin (ed.). *Economics andSocial Welfare: Essays in Honor or Tibor Scitovsky*, New York, Academic Press, 1979, pp. 183-201.

Sen, A. K. "Rationality and social choice", *The American Economic Review*, vol. 1, núm. 85, 1995, pp. 1-24.

Subiza, B. “Numerical representations of acyclic preferences”, *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 38, núm. 4, 1994.

Suppes, P., D. Krantz, R. D. Luce y A. Tversky. *Foundations of Measurement*, vol. 2, Academic Press, San Diego, 1989.

Villar, A. “La lógica de la elección social: una revisión de los resultados básicos”, *Investigaciones Económicas*, vol. XII, núm.1 (2ª época), 1988, pp. 3-44.