denarius
revista de economía y administración

Métodos de decisión multicriterio

*María Cristina Escobar Iturbe**
*Elisa A. González del Valle Campoamor**

Resumen

En este artículo se presenta el paradigma de la decisión multicriterio y su potencialidad en la toma de decisiones en problemas del mundo real, donde es común que ocurra el conflicto entre los objetivos por satisfacer. Se desarrolla la programación por compromiso para salvar la contradicción entre los objetivos de manera óptima. Se define el concepto de solución Pareto óptima o solución eficiente y se describen los métodos de ponderaciones, restricciones y simplex multicriterio, como generadores del conjunto eficiente. Finalmente se presenta un ejemplo de aplicación en el campo de las inversiones, de la programación por compromiso, utilizando el método de las ponderaciones, con diferentes métricas en la generación del conjunto de soluciones Pareto óptimas. Asimismo, se destaca el hecho de que, como todo método de toma de decisiones, la decisión obtenida únicamente cumple de manera óptima para el centro decisor.

Palabras clave: decisión multicriterio, solución Pareto, programación por compromiso.

* Profesora investigadora tiempo completo Titular “C”, Departamento de Economía, UAM-I.
* Profesora investigadora tiempo completo Titular “C” Departamento de Economía, UAM-I.

La programación multiobjetivo –también llamada optimización vectorial– constituye un enfoque multicriterio de gran potencialidad cuando el contexto decisional está definido por una serie de objetivos por optimizar, que deben satisfacer un determinado conjunto de restricciones. Como la optimización simultánea de todos los objetivos por lo general es imposible –pues en la vida real suele existir cierto grado de conflicto entre los objetivos que pretende optimizar un centro decisor–, el enfoque multiobjetivo, en vez de intentar determinar un "no existente óptimo", pretende establecer el conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimas.[1]

Planteado el problema en estos términos, la estructura general de un programa multiobjetivo puede representarse esquemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &Eff\ f(x) = [f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_n(x)] \\ &sa: \\ &x \in F \end{aligned} \tag{1.1}$$

Donde $\mathcal{E}ff$ significa la búsqueda de soluciones eficientes o Pareto óptimas.

f_i(x) = Expresión matemática del atributo i-ésimo.

(x) = Vector de variables de decisión.

F = Conjunto de restricciones (usualmente lineales) que definen el conjunto de soluciones factibles.

[1] El concepto de optimalidad paretiana, dentro del campo multicriterio, puede definirse formalmente de la siguiente manera: Un conjunto de soluciones es eficiente (o Pareto óptimo) cuando está formado por soluciones factibles (esto es, que cumplen las restricciones) tales que no existe otra solución factible que proporcione una mejora en un atributo sin producir un empeoramiento en al menos otro de los atributos. El conjunto de soluciones posibles se particiona en dos subconjuntos disjuntos: el subconjunto de soluciones factibles no eficientes y el subconjunto de soluciones factibles y eficientes. Una vez realizada la partición, se introducen de diferentes maneras las preferencias del centro decisor con objeto de obtener un compromiso entre las soluciones factibles y las eficientes.

Debe indicarse que la búsqueda de soluciones eficientes puede establecerse en un sentido maximizador cuando “más del atributo es mejor” o, en un sentido minimizador, cuando “menos del atributo es mejor”.

El propósito del enfoque multiobjetivo consiste en segregar del conjunto de soluciones posibles un subconjunto propio del mismo cuyos elementos gocen de la condición de optimalidad paretiana. Debe indicarse que la programación multiobjetivo aborda tal tarea utilizando una información estrictamente técnica (restricciones, expresiones matemáticas de los atributos, etc.) sin incorporar al análisis ninguna información sobre las preferencias del centro decisor. Planteado el problema en estos términos, la operatividad de la programación multiobjetivo consistirá en desarrollar una serie de técnicas que permitan, a partir de la estructura (1.1), generar el conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimas. En el apartado siguiente se realiza una exposición introductoria de dichas técnicas.

Técnicas generadoras del conjunto eficiente

Los métodos más utilizados para generar, o al menos aproximar, el conjunto eficiente son: el *método de las ponderaciones,* el *método de las restricciones y* el *simplex multicriterio.* En seguida pasamos a exponer los fundamentos de cada uno de estos métodos.

Método de las ponderaciones

En el método de las ponderaciones cada objetivo se multiplica por un peso o factor no negativo, procediéndose después a agregar todos los objetivos ponderados en una *única función objetivo*.

La optimización de dicha función ponderada y agregada genera un elemento del conjunto eficiente. Por medio de la parametrización de los pesos asociados a los objetivos, se va aproximando el conjunto eficiente o conjunto de soluciones Pareto óptimas. Así, en un problema multiobjetivo con n objetivos por maximizar la aplicación del método de las ponderaciones conduce al siguiente *programa lineal paramétrico:*

$$
\begin{aligned}
& Max\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i \qquad\qquad (1.2)\\
& sa\\
& f\in F\\
& \lambda\geq 0
\end{aligned}
$$

Para cada vector de pesos λ se obtiene un elemento del conjunto eficiente. Debe apuntarse que el método de las ponderaciones garantiza soluciones eficientes sólo cuando los pesos son estrictamente positivos (esto es, $\lambda_i > 0 \ \forall\ i = 1.2, ., n$).

Método de las restricciones

Con el método de las restricciones se optimiza uno de los n objetivos, esto es, se trata como "*función objetivo*" propiamente dicha, mientras que los *demás objetivos se incorporan al conjunto de restricciones como restricciones paramétricas.* Para cada conjunto de valores que se dé al vector de términos independientes, o término de la derecha, se genera un elemento del conjunto eficiente.

Así, en un problema multiobjetivo con n objetivos por maximizar, la aplicación del método de las restricciones conduce a un nuevo programa lineal paramétrico:

$$
\begin{aligned}
& Máxf_j(x)\\
& sa\\
& f_j(x)\geq H_i\\
& i=1,2,...j-1,j+1,....n \qquad\qquad (1.3)\\
& x\in F
\end{aligned}
$$

Variando en forma paramétrica los términos de la derecha H_i (donde i=1,2, … k), generaremos los elementos del conjunto eficiente. Debe apuntarse que el método de las restricciones garantiza soluciones eficientes sólo cuando las restricciones paramétricas de (1.3) son activas en el óptimo.

Método simplex multicriterio

El método simplex multicriterio genera todos los puntos de esquina (*corner points*) eficientes de un problema multiobjetivo, desplazándose para ello de un punto esquina al punto esquina contiguo. El algoritmo del simplex tradicional constituye el mecanismo adecuado para efectuar este tipo de desplazamiento, de un punto de esquina a un punto adyacente, por medio de una operación de pivoteo. En combinación con esta operación de salto de un punto de esquina a otro, el simplex multicriterio recurre a una subrutina que permite comprobar la eficiencia o no de cada punto obtenido. El simplex multicriterio *trabaja de manera eficiente* sólo con problemas de un tamaño reducido, entendiendo por tamaño reducido un *número de objetivos inferior a cinco, así como un número de variables y restricciones no superior a cien*.[2]

La programación multiobjetivo, tal como la hemos presentado en los apartados anteriores, puede considerarse la primera etapa de un proceso decisional. En efecto, con la aplicación de este enfoque conseguimos particionar el conjunto factible en dos subconjuntos: el subconjunto de "soluciones paretianamente eficientes" y el subconjunto de "soluciones dominadas" o inferiores. La partición del conjunto factible se ha realizado de una manera mecánica, *sin tener en cuenta las preferencias del centro decisor*. En todo caso, una vez eliminadas las soluciones inferiores, puede decirse que comienza el proceso decisional propiamente dicho. Para abordar tal tipo de tarea, *tendremos que introducir de una manera u otra las preferencias del centro decisor.* Una de las formas más fructíferas de abordar esta tarea es por medio de la *programación compromiso,* cuyos rasgos básicos se exponen en la siguiente sección.

[2] Una exposición accesible del simplex multicriterio puede verse en los capítulos 7, 8, y 9 del libro *Multiple Criteria Optimization*: *Theory*, *Computation*, *and Application*, de R. E. Steuer.

Programación compromiso

El primer paso, dentro del enfoque compromiso, consiste en establecer lo que Zeleny llama punto o alternativa ideal.[3] Las coordenadas de la alternativa ideal están dadas por los valores óptimos de los correspondientes objetivos, forzando el proceso de optimización al cumplimiento de las restricciones del problema. El punto o alternativa ideal se puede representar por medio del siguiente vector:

$$\begin{aligned} &siendo \\ &f^* = (f_1^*, \ldots f_i^*, \ldots f_n^*) \\ &donde \\ &f_i^* = Máx f_i(x) \\ &sa \\ &x \in F \end{aligned} \qquad (1.4)$$

cuando se pretende maximizar los n objetivos. Cada elemento del vector f* se denomina "punto ancla". Por lo general, la alternativa ideal es inalcanzable. Obviamente, si dicha alternativa fuera alcanzable ello implicaría que no existe conflicto alguno entre los n objetivos, por lo que de hecho no existirían problemas de elección multicriterio, pues la alternativa ideal f* sería la elección óptima.

Cuando el punto o alternativa ideal es inalcanzable, la elección óptima o mejor solución compromiso está dada por la solución eficiente más próxima al punto ideal. Esta regla de comportamiento suele denominarse "axioma de Zeleny", pues fue este investigador quien la propuso en 1973. De acuerdo con este postulado, dadas las soluciones f1 y f2, la solución preferida será aquella que se encuentre más próxima al punto ideal. Dependiendo de la "métrica" que se elija tendremos distintas "funciones de distancia", lo que nos permitirá establecer "diferentes conjuntos compromiso". Para abordar tal tarea, comenzaremos por

[3] El punto de partida de la programación compromiso son los siguientes dos trabajos: P.L. Yu. "A class of solutions for group decision problems", pp. 688-693, y M. Zeleny. *Multiple Criteria Decision Making*, pp. 262-301.

definir el grado de proximidad existente entre el objetivo i-ésimo y su ideal o valor ancla:

$$d_j = [f_j^* - f_j(x)] \tag{1.5}$$

Una vez definido el grado de proximidad d_j, el paso siguiente consistirá en agregar los grados de proximidad para todos los objetivos de nuestro problema. Ahora bien, hay que tener en cuenta que por lo general los objetivos se miden en unidades distintas, por los que la suma de los grados de proximidad no tiene sentido o significado al carecer de homogeneidad dimensional. Por lo tanto, habrá que proceder a la normalización de los objetivos. Por otra parte, los valores absolutos de los niveles de logro de los diferentes objetivos pueden ser muy distintos, lo que fuerza a una normalización si queremos evitar soluciones sesgadas hacia los objetivos que pueden alcanzar valores mayores. Una posible forma de normalizar los objetivos es la siguiente:

$$d_j = \frac{[f_j^* - f_j(x)]}{[f_j^* - f_{*j}]} \tag{1.6}$$

donde d_j representa el grado de proximidad del objetivo j-ésimo normalizado y f_{*j} simboliza el antiideal de dicho objetivo, es decir, el peor valor posible para el objetivo j-ésimo sobre el conjunto eficiente. El grado de proximidad normalizado está acotado entre [0,1]. Así, cuando un objetivo alcanza el valor ideal su grado de proximidad es cero; por el contrario, dicho grado alcanza el valor 1 cuando el objetivo toma un valor igual a su antiideal. Si representamos con W_j las preferencias que el centro decisor asocia a la discrepancia existente entre la realización del objetivo j-ésimo y su ideal, la programación por compromiso –consistente en la búsqueda de las soluciones eficientes más próximas al ideal– se convierte en el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
&MínL_{\pi} = [\sum_{j=1}^{n} W_j^{\pi} [\frac{f_j^* - f_j(x)}{f_j^* - f_{*j}}]]^{1/\pi} \\
&sa \\
&x \in F
\end{aligned}
\qquad \textbf{(1.7)}
$$

El parámetro π representa la métrica que define la familia de funciones de distancia. Es decir, para cada valor del parámetro π tendremos una distancia en concreto. Así, la distancia tradicional o euclidiana es un caso particular de la expresión (1.7), esto es, el que corresponde a $\pi = 2$. Para $\pi = 1$ la mejor solución compromiso, o punto más próximo al ideal, se puede obtener resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
&MínL_1 = \sum_{i=1}^{n} W_j \frac{f_j^* - f_j(x)}{f_j^* - f_{*j}} \\
&sa \\
&x \in F
\end{aligned}
\qquad (1.8)
$$

La función objetivo (1.8) es equivalente a la siguiente maximización:

$$
\begin{aligned}
&Máx = \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{f_j(x)}{f_j^* - f_{*j}} = Máx \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x) \\
&donde \\
&\alpha_j = \frac{W_j}{(f_j^* - f_{*j})}
\end{aligned}
\qquad (1.9)
$$

Para la métrica $[\pi{=}\infty]$ se minimiza la máxima desviación de entre todas las desviaciones individuales; esto es, para $[\pi{=}\infty]$ sólo la desviación mayor influye en el proceso de minimización. Para esta métrica, la mejor solución compromiso o punto más próximo al ideal se puede obtener resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
& MínL_{\infty} = D \\
& sa \\
& \alpha_1 [f_1^* - f_1(x) \leq D \qquad (1.10) \\
& . \\
& . \\
& . \\
& , \\
& \alpha_n [f_n^* - f_n(x) \leq D
\end{aligned}
$$

donde las α se definieron con anterioridad.

Para obtener la mejor solución compromiso para métricas distintas de $\pi = 1$ y $\pi = \infty$, se hace necesario recurrir a algoritmos de programación matemática no lineal, lo que constituye sin duda una dificultad operativa. No obstante, esta dificultad se reduce en forma considerable si tenemos en cuenta un importante resultado introducido en la literatura por Yu.[4] Este autor demostró que, para problemas con dos objetivos, los puntos L_1 y L_{∞} definen un subconjunto de la frontera eficiente denominado por Zeleny[5] conjunto compromiso.

Las otras mejores soluciones compromiso pertenecen al conjunto acotado por dichos puntos, L_1 y L_{∞}•. Posteriormente, Freimer y Yu[6] demostraron que, para problemas con más de dos objetivos, los puntos L_1 y L_{∞} no tienen que definir por fuerza un conjunto compromiso. Dicho con otras palabras, en contextos

[4] *idem.*

[5] M. Zeleny. "A concept of compromise solutions and the method of the displaced ideal", *Computers and Operations Research*, pp. 479-496.

[6] M. Freimer y P.L. Yu. "Some new results on compromise solutions for group decision problems", *Management Science*, pp. 688-693.

de más de dos objetivos, para métricas distintas de $\Pi = 1$ y $\Pi = \infty$ pueden existir soluciones compromiso que no pertenezcan al intervalo cerrado $[L_1, L_\infty]$. Aunque la posibilidad apuntada por Freimer y Yu es cierta, es poco probable que se presente en la práctica, por lo que la potencialidad de la programación compromiso se mantiene al no ser necesario computar modelos complicados de programación matemática no lineal.

Asimismo, es interesante comentar que en el punto L_∞ se satisfacen las siguientes relaciones entre objetivos:[7]

$$\alpha_1 [f_1^* - f_1(x)] = \ldots = \alpha_j [f_j^* - f_j(x) = \ldots \alpha_n [f_n^* - f_n(x) \qquad (1.11)$$

es decir, la solución asociada al punto $L\infty$ es una solución bien equilibrada, pues las discrepancias ponderadas y normalizadas entre el valor alcanzado por cada objetivo y sus respectivos ideales son iguales.

El carácter equilibrado de la solución dota a este punto de un especial atractivo desde un punto de vista de elección. En efecto, muchos centros decisores pueden centrar su atención en la elección de "soluciones equilibradas" en el siguiente sentido: "no a unos excesivos gastos en alimentación en detrimento de los gastos en vestidos, demasiados gastos para vacaciones en detrimento de los gastos en educación, etcétera".

Puede decirse que la solución L_1 corresponde a una situación en la que se "maximiza la suma ponderada de los logros de cada objetivo", traduciéndose en algo así como un *punto de máxima eficiencia*, pero que puede estar fuertemente "desequilibrado". Por el contrario, en la solución L_∞ subyace una "lógica de equilibrio" en vez de una" lógica de eficiencia". Estas dos interpretaciones dotan a la programación por compromiso de elementos que fortalecen la decisión, orientando al centro decisor en la selección de alternativas adecuadas al mundo

[7] En este sentido pueden consultarse los siguientes trabajos: E. Ballestero y C. Romero. "A theorem connecting utility function optimization and compromise programming", *Operations Research Letters*, pp. 421-427; y E. Ballestero y C. Romero. "Utility optimization when the utility function is virtually unknown", *Theory and Decision*, pp. 233-243.

real. Esta óptica en las soluciones demuestra una de las potencialidades de la programación por compromiso, haciendo mucho más adecuada su aplicación a problemas del mundo real.

Una aplicación a la selección de inversiones desde una óptica económica y ambiental

Tanto la lógica como la mecánica operativa de la programación compromiso son perfectamente aplicables a problemas multicriterio de tipo discreto. Vamos a ilustrar esta cuestión por medio de un ejemplo ilustrativo. Así, supongamos el caso de un centro decisor que tiene que ordenar de manera preferencial cinco inversiones que denominamos A, B, C, D y E, las cuales se evalúan con base en cinco criterios: valor actual neto (VAN), tasa interna de rendimiento (TIR), nivel de empleo, volumen de ventas e impacto ambiental. Todos los criterios son del tipo "más del atributo mejor", excepto para el criterio de impacto ambiental, en el que un valor más bajo del índice toneladas de SO_2 emitidas indica, obviamente, una mejor situación ambiental. Los datos de partida, esto es, la matriz decisional, aparecen en la tabla 1.

De la tabla 1 se deducen inmediatamente los siguientes vectores ideal y antiideal.

Ideal = [250, 30, 20, 100, 25]

Antiideal = [100, 15, 4, 25, 500]

Supongamos que el centro decisor proporciona el siguiente vector de pesos preferenciales:

$$W = \left[W_1 = 0.25, W_2 = 0.25, W_3 = 0.20, W_4 = 0.10, W_5 = 0.20 \right]$$

es decir, el VAN y el TIR de la inversión son 2,5 veces más importantes que las ventas. Este atributo es, a la vez, la mitad de importante que los atributos impacto ambiental y nivel de empleo, etcétera.

El primer paso para aplicar la programación compromiso a nuestro problema de selección de inversiones consistirá en calcular la matriz de grados de proximidad normalizados. Los elementos de dicha matriz se obtienen por aplicación inmediata de la expresión (1.11) a la matriz decisional inicial recogida en la tabla 1. Por ejemplo, el grado de proximidad al ideal de la alternativa A para el atributo 4 (volumen de ventas) estará dado por:

$$d_{A,4} = \frac{100-40}{100-25} = 0.80$$

Los 25 grados de proximidad para los datos de nuestro ejemplo se representan en la matriz de la tabla 2. A partir de los datos de la tabla 2, procedemos a calcular las distancias entre cada punto extremo eficiente o alternativa y el punto ideal. Dichos cálculos se han efectuado para las métricas $\pi = 1$, $\pi = 2$ y $\pi = \infty$. A título ilustrativo, reproducimos los cálculos para el caso de la alternativa o elección A:

$$L_1(A) = 0.25 * 1 + 0.25 * 1 + 0.20 * 0.8125 + 0.10 * 0.80 + 0.20 * 0.053$$

$$L_2(A) = 0.25^2 * 1 + 0.25^2 * 1 + 0.20^2 * 0.8125^2 + 0.10^2 * 0.80^2 + 0.20^2 * 0.053^2$$

$$L_\infty(A) = Max\,[0.25 * 1, 0.25 * 1, 0.20 * 0.8125, 0.10 * 0.80, 0.20 * 0.053]$$

En la tabla 3, se recogen las distancias obtenidas entre las cinco alternativas –para las tres métricas elegidas– y el "punto ideal". Dichos resultados implican la ordenación de alternativas de la figura 1. Puede resultar interesante observar que para las métricas $\pi = 1$ y $\pi = 2$, la ordenación de alternativas obtenida es la misma. Sin embargo, para la métrica $\pi = \infty$ se producen algunos cambios. Así, se intercambia el orden de las alternativas B y E, formando las alternativas A y C un conjunto de indiferencia en la parte inferior de la escala de ordenación.

Atributos / Alternativas	Valor actual neto (VAN) (millones de pesos)	Tasa interna de rendimiento (TIR) %	Empleo # de trabajadores	Ventas (millones de pesos)	Impacto ambiental (toneladas de SO_2)
A	100	15	7	40	50
B	200	25	7	60	200
C	100	20	4	25	25
D	200	30	20	70	350
E	200	25	15	100	500

Tabla 1. Matriz decisional inicial

En la matriz decisional inicial se obtienen las coordenadas de cada una de las alternativas en el espacio multdimensional, en este caso R^5, calculadas por medio del valor de cada una de ellas respecto a cada uno de los objetivos o atributos, definidos por el centro decisor.

Atributos / Alternativas	Valor actual Neto (VAN) (millones de pesos)	Tasa interna de rendimiento (TIR) %	Empleo # de trabajadores	Ventas (millones de pesos)	Impacto ambiental (toneladas de SO_2)
A	1	1	0.8125	0.800	0.053
B	0.333	0.333	0.8125	0.533	0.368
C	1	0.666	1	1	0
D	0.333	0	0	0.400	0.684
E	1	0.333	0.3125	0	1

Tabla 2. Matriz de grados de proximidad normalizados

Tabla 3. Matriz de distancias

Atributos / Alternativas	L_1	L_2	L
A	**0.753**	**0.397**	**0.250**
B	**0.456**	**0.276**	**0.163**
C	**0.716**	**0.374**	**0.250**
D	**0.260**	**0.165**	**0.137**
E	**0.346**	**0.225**	**0.200**

El ordenamiento de las alternativas mostrado en la tabla 3 tiene como significado las preferencias de las alternativas del centro decisor definido por el vector de ponderaciones W, respecto a las diferentes métricas. Es importante destacar que este resultado es válido únicamente para el centro decisor definido por el vector (W) propuesto y sólo para éste. En tal caso la selección de los objetivos o atributos por satisfacer y las alternativas por considerar son propuestas por los analistas de inversiones. En este ejemplo cada una de las coordenadas de las alternativas en el espacio multiatributo fueron susceptibles de calcularse; cuando no lo sean, pueden obtenerse utilizando la consulta a expertos y aplicando el método Delphi, sin pérdida alguna de eficiencia de la programación por compromiso.

L_1	**D**	**E**	**B**	**C**	**A**
L_2	**D**	**E**	**B**	**C**	**A**
L	**D**	**B**	**E**	**A ,C**	

Figura 1. Ordenación de alternativas para diferentes métricas

Conclusiones

El ordenamiento de las alternativas mostrado en la figura 1 tiene como significado las preferencias de las alternativas del centro decisor definido por el vector de ponderaciones W, respecto a las diferentes métricas. Es importante destacar que este resultado es válido únicamente para el centro decisor definido por el vector (W) propuesto y sólo para éste. En tal caso la selección de los objetivos o atributos por satisfacer y las alternativas por considerar son propuestas por los analistas de inversiones. En este ejemplo cada una de las coordenadas de las alternativas en el espacio multiatributo fueron susceptibles de calcularse; cuando no lo sean, pueden obtenerse utilizando la consulta a expertos y aplicando el método Delphi, sin pérdida alguna de eficiencia de la programación por compromiso.

BIBLIOGRAFÍA

Ballestero, E. y C. Romero. "A theorem connecting utility function optimization and compromise programming", *Operation Research Letters*, núm. 10, 1991, pp. 421-427.

Ballestero, E. y C. Romero. "Utility optimization when the utility function is virtually unknown", *Theory and Decision*, núm. 37, 1994, pp. 233-243.

Bogetoff, P. y P. Pruzan. *Planning with Multiple Criteria*, Elsevier, Amsterdam, 1991.

Chankong, V. y Y. Haimes. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland, New York, 1983.

Freimer, M. y P. L. Yu. "Some new results on compromise solutions for group decision problems", *Management Science*, núm. 22, 1976, pp. 688-696.

Goicoechea, A., D. R. Hansen y L. Duckstein. *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

Guerra, L. A. *Gestión de empresas y programación multicriterio*, ESIC, Madrid, 1989.

Haimes, Y., K. Tarvainen, T. Shima y J. Thadathil. *Hierarchical Multiobjective Analysis of Large-Scale Systems*, Hemisphere Publishing, New York, 1990.

Ignizio, J. P. *Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.

Ignizio, J. P. *Introduction to Linear Goal Programming*, SAGE Publications, Beverly Hills, 1985.

Lieberman, E. R. *Multi-Objective Programming in the USSR*, Academic Press, Boston, 1991.

Olson, D. L. *Decision Aids for Selection Problems*, Springer-Verlag, New York, 1996.

Sawaragi, Y., H. Nakayama y T. Tanino. *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, New York, 1985.

Statnikov, R. B. y J. B. Matusov. *Multicriteria Optimization and Engineering*, Chapman and Hall, New York, 1995.

Stever, R. E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, Kneger, Malbar, 1989.

Tabucanon, M. T. *Multiple Criteria Decision Making in Industry*, Elsevier, Amsterdam, 1988.

Vincke, Ph. *Multicriteria Decision-Aid*, John Wiley and Sons, Chichester, 1992.

Yu, P. L. "A class for solutions for group decision problems", *Management Science*, núm. 19, 1973, pp. 688-693.

Yu, P. L. *Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum, New York, 1985.

Zeleny, M. "A concept of compromise solutions and the method of the displaced ideal", *Computers and Operations Research*, núm. 1, 1974, pp. 479-496.

Zeleny, M. *Linear Multiobjective Programming*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.