denarius
revista de economía y administración

# DECISIONES PARA LA ADMINISTRACIÓN DEL RIESGO MACROECONÓMICO

*Francisco Venegas-Martínez**

## RESUMEN

*En esta investigación se desarrolla un modelo macroeconómico estocástico con precios conducidos por procesos de difusión con saltos. De manera específica, los movimientos pequeños, que se presentan todos los días en los precios, se modelan a través del movimiento geométrico browniano y los movimientos extremos e inesperados, que ocurren ocasionalmente en los precios, se modelan a través del proceso de Poisson. En el equilibrio se determinan en forma endógena los procesos estocásticos que conducen a la tasa de inflación, el tipo de cambio y los precios de los distintos activos disponibles en la economía. En el equilibrio se determinan tres grupos de ecuaciones: las ecuaciones de tendencia, las ecuaciones de varianza y las ecuaciones de salto. En particular, se examina el problema de administración de riesgos de política monetaria y fiscal.*

**Palabras clave**: modelo macroeconómico estocástico, administración de riesgos, equilibrio.

* Centro de Investigación en Finanzas, Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México.

## 1. Introducción

En este trabajo se desarrolla un modelo macroeconómico estocástico del tipo Ramsey con un sector financiero. El nivel general de precios, el cual se determina en forma endógena, evoluciona de acuerdo a un proceso markoviano de difusión combinado con saltos de Poisson. El movimiento browniano geométrico modela la tasa de inflación esperada y el proceso de Poisson modela los movimientos atípicos en el nivel general de precios. Nuestro modelo incorpora la exposición a distintos riesgos financieros en la toma de decisiones de los agentes y considera de manera específica el efecto de la incertidumbre fiscal y monetaria sobre el equilibrio. En nuestro modelo, el equilibrio macroeconómico depende de los parámetros de los procesos estocásticos exógenos que guían la dinámica de las variables de política. En dicho equilibrio, es posible evaluar el impacto de la incertidumbre sobre el comportamiento de la economía. Por último, se determinan la tasa de interés y la tasa de expansión monetaria, congruentes con la maximización del bienestar económico de los agentes.

En la literatura financiera es muy común el supuesto de que los datos siguen una distribución lognormal, o que las tasas de crecimiento siguen una distribución normal. En particular, es usual suponer que las variables financieras siguen un movimiento browniano geométrico. Sin embargo, existe evidencia empírica contundente (véase por ejemplo Venegas-Martínez, 2000a) de que la mayoría de las variables financieras no se comportan de acuerdo con una distribución lognormal. Una de las características que distinguen a las variables financieras es que en ocasiones se presentan movimientos inesperados (auges o caídas). Estos movimientos ocurren con más frecuencia de lo que se esperaría en una distribución lognormal, incluso si se supone una volatilidad razonablemente moderada. Este hecho es muy importante para la teoría y la investigación empírica, y no es sólo una sofisticación más en el desarrollo de modelos de equilibrio general. El modelo propuesto toma en cuenta y evalúa el desempeño de la economía como un todo cuando se presentan dichos cambios extremos y repentinos.

En el análisis de datos, cuando se compara una distribución estandarizada empírica de una variable financiera con una distribución normal estándar es común observar que la cresta de la distribución empírica es más alta que la de una distribución normal estándar. Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar, es decir, los mismos puntos de inflexión, entonces las colas de la distribución empírica tienen que ser por fuerza más anchas para compensar el área de la cresta, que en ambos casos deben ser iguales a uno. Esta diferencia es típica en muchas variables financieras, incluso en las tasas de inflación y de crecimiento del dinero. En general, se observa que la distribución empírica diverge notablemente de la distribución normal. Una cresta que es mucho más alta implica que existe una mayor probabilidad, de lo que se esperaría en la distribución normal, de que se presenten movimientos pequeños en la variable de interés. Además, debido a las colas gordas (o pesadas) de la distribución empírica, existe una mayor probabilidad de que ocurran valores extremos en comparación con la distribución normal. La mezcla de procesos de difusión con procesos de saltos proporciona una alternativa para el modelado de colas gordas, además de que brinda un ambiente más propicio para racionalizar dinámicas de precios que no pueden generarse con modelos que sólo consideran movimientos brownianos. Existe en la literatura económica una tendencia creciente a emplear la maximización de utilidad esperada con restricciones que incluyen procesos de difusión con saltos para estudiar condiciones de equilibrio. Algunos ejemplos se encuentran en Venegas-Martínez (2001) y (2000), Svensson (1992), y Penati y Pennacchi (1989).

En los últimos años, la economía mundial ha experimentado una serie de cambios y transformaciones profundas que han impactado tanto la forma de llevar a cabo el análisis económico como el diseño de la política económica. Estos cambios han abierto nuevos paradigmas que resaltan la exposición de la política económica a diferentes tipos de riesgos. En general, estos paradigmas han abierto otros horizontes a la teoría económica y, en consecuencia, al empleo de herramientas más sofisticadas que permitan una mayor comprensión de los fenómenos de naturaleza estocástica. En el campo del análisis económico, uno de los cambios actuales más importantes es la superación del marco determinista, no sólo como resultado del riesgo inherente a la mayoría de los activos financieros, sino como respuesta más completa a los procesos de decisión de los agentes económicos. La adecuada y oportuna administración de riesgos reduce la varianza de las variables de política, lo que permite crear dispositivos congruentes, eficaces y creíbles que minimicen el impacto esperado de los *shocks* exógenos. Por otro lado, la discusión permanente sobre la estrategia de política económica, así como los instrumentos y mecanismos para desarrollarla, se han ubicado en un marco de referencia más amplio al que se incorporan factores estocásticos. En este sentido, los instrumentos de política monetaria (tasa de expansión monetaria y tasa de interés), junto con los instrumentos de política fiscal (gasto público e impuestos), se pueden combinar para reducir la exposición a los distintos tipos de riesgos que pueden tener efectos negativos en la economía.

La política económica adoptada por México desde los años setenta del siglo anterior es un claro ejemplo de la presencia de procesos aleatorios con saltos ligados al nivel general de precios. Al inicio de esa década, México siguió una estrategia expansiva centrada en el crecimiento del gasto público. De esta forma, al aumentar la demanda agregada se incrementaba el nivel de producción y, en consecuencia, se esperaba un incremento en los salarios, créditos e inversiones, con lo que se pretendía generar crecimiento y bienestar. Las políticas expansionistas mediante el gasto público excesivo se financiaron a través de emisión monetaria o por endeudamiento externo, lo cual permitió impulsar la actividad económica a corto plazo pero con efectos inflacionarios posteriores. La inflación promedio entre 1971 y 1981 fue de 17.9% y alcanzó 92.6% en 1982. Para fines de 1987 la inflación llegó a un nivel de 131.8%. Entre 1983 y 1985 el gobierno impulsó un programa económico de ajuste severo. En dicho programa, como resultado del esfuerzo fiscal y de la contracción de los salarios reales, la inflación, para fines de 1983, fue de un poco más de 80%, rompiendo con una tendencia muy peligrosa hacia el alza. En diciembre de 1984 la inflación se colocó en casi 60% y no fue posible reducirla más allá de ese nivel en 1985. A finales de 1985 la inflación continuó su tendencia al alza, alcanzando la cifra de 105% en diciembre de 1986, y hacia el final de 1987 la amenaza de una hiperinflación volvió a presentarse; en los años siguientes se entabló una lucha contra la inflación como el centro de la estrategia económica.

En diciembre de 1987 se creó el Pacto de Solidaridad Económica, mediante el cual daba inicio un nuevo esfuerzo para disminuir la inflación y recuperar el crecimiento económico. Los primeros resultados fueron extraordinarios: para finales de 1988 la inflación anualizada fue inferior al 25%. Para 1990 el exceso de gasto interno se reflejó en la balanza de pagos, donde la cuenta corriente empeoró y la inflación tuvo un repunte de 29.9%. Se aplicó entonces una política monetaria restrictiva, se corrigieron las inercias en los precios anclándolos nominalmente y se estabilizaron las finanzas públicas. De esta forma, la consolidación de un crecimiento económico sostenido y sustentable se planteó de nuevo como objetivo del sector público. Sin embargo, en diciembre de 1994 irrumpió una debacle financiera y los saltos en el nivel general de precios se tornaron persistentes. Por lo anterior, un estudio más completo y realista de la evolución de la economía plantea la necesidad de un marco de análisis exhaustivo que incorpore saltos aleatorios en las variables económicas.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En el primer apartado se presenta una introducción al modelo estocástico que se desarrolla en esta tesis. En el siguiente apartado se muestra el modelo estocástico de la dinámica del nivel general de precios y se plantea el problema de decisión de los consumidores. Enseguida, se resuelve el problema de decisión de las empresas. Con el propósito de cerrar el modelo, en el cuarto apartado se especifica el comportamiento del gobierno. El equilibrio macroeconómico se determina en el quinto apartado, mientras que en el último se aborda el trabajo empírico sobre el nivel de precios. Finalmente, se presentan las conclusiones.

## 2. Problema de decisión de los consumidores

### *2.1 Dinámica del nivel de precios*

Con el propósito de generar soluciones que sean analíticamente tratables, la estructura de la economía se mantendrá lo más simple posible. La economía produce y consume un solo bien de carácter perecedero y está poblada por consumidores idénticos con vida infinita que maximizan su utilidad.

El modelo supone que los individuos perciben que el precio del bien, $P_t$, es conducido por un proceso estocástico de difusión con saltos:

$$dP_t = \pi P_t dt + \sigma_P P_t dW_{P,t} + \nu_P P_t dQ_{P,t}, \tag{1}$$

donde $\pi$, el parámetro de tendencia, representa la tasa de inflación promedio esperada a condición de que no ocurra salto alguno; $\sigma_P$ es la volatilidad esperada de la tasa de inflación; y $1+\nu_P$ es el tamaño promedio esperado de posibles saltos en el nivel general de precios. El proceso $W_{P,t}$ es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, $W_{P,t}$ presenta incrementos normales independientes con $E[dW_{P,t}]=0$ y $Var[dW_{P,t}]=dt$. Suponemos que los saltos en el nivel general de precios siguen un proceso de Poisson, $Q_{P,t}$, con parámetro de intensidad $\lambda_P$, de tal manera que

$$Pr\{\text{ un salto unitario durante } dt\}=Pr\{dQ_{P,t}=1\}=\lambda_P dt+o(dt), \qquad (2)$$

mientras que[1]

$$\Pr\{\text{ ningún salto en } dt\}=Pr\{dQ_{P,t}=0\}=1-\lambda_P dt+o(dt) \qquad (3)$$

Por lo tanto, $E[dQ_{P,t}]=Var[dQ_{P,t}]=\lambda_P dt$. El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $Q_{P,0}=0$. En todo lo que sigue, suponemos que $W_{P,t}$ y $Q_{P,t}$ no están correlacionados entre sí. La tendencia $\pi$, así como las componentes de difusión y salto $\sigma_P dW_{P,t}$ y $\nu_P dQ_{P,t}$ se determinan en forma endógena.

### *2.2 Activos de los consumidores*

El consumidor representativo posee tres diferentes acervos de activos: dinero, $M_t$; títulos de deuda pública, $B_t$; y títulos de capital (acciones), $k_t$. En consecuencia la riqueza real, $a_t$, del individuo está dada por

$$a_t=m_t+b_t+k_t, \qquad (4)$$

donde $m_t=M_t/P_t$ son los saldos monetarios reales y $b_t=B_t/P_t$ es la tenencia de bonos del sector público en términos reales. El consumidor obtiene satisfacción por el consumo del bien que produce la economía y por la tenencia de saldos reales, debido a sus servicios de liquidez.

[1] Como siempre, $o(h)$ significa que $o(h)/h\to 0$ cuando $h\to 0$.

Suponemos que la función de utilidad esperada es del tipo von Neumann-Morgenstern. De manera específica, la función de utilidad total descontada al tiempo $t = 0,\ V_0$ de un individuo representativo, competitivo y adverso al riesgo tiene la siguiente forma separable:

$$V_0 = E_0\left\{\int_0^{\infty}[u(c_t)+v(m_t)]e^{-\delta t}dt\right\}, \tag{5}$$

donde $E_0$ es la esperanza condicional del conjunto de información disponible en el tiempo $t = 0$. En particular, nosotros seleccionamos $u(c_t) = \theta \log(c_t)$ y $\upsilon(m_t) = (1-\theta)\log(m_t)$ a fin de generar soluciones que faciliten el análisis. Por otra parte, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación estocástica

$$da_t = a_t[\ N_{m,t}dR_{m,t} + N_{b,t}dR_{b,t} + N_{k,t}dR_{k,t}\ ] - c_t(1+\tau_c)dt - d\tau\ , \tag{6}$$

donde:

$N_{j,t} \equiv \dfrac{j_t}{a_t}$ proporción del portafolio en el activo $j,\ j = m,b,k$

$dR_{j,t}$ = tasa de retorno real después de impuestos sobre el activo $j,\ j = m,b,k$

$d\tau_t$ = impuestos sobre la riqueza

$\tau_c$ = impuestos sobre el consumo

### *2.3 Rendimiento de los activos*

A continuación determinaremos el rendimiento de los activos. Suponemos que las tasas nominales de rendimiento que pagan el dinero y los bonos son cero e $i$, respectivamente. El retorno estocástico por la tenencia de saldos reales al tiempo $t,\ dR_{m,t}$, es simplemente el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. La aplicación del lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios, tomando (1) como el proceso subyacente, conduce a

$$dR_{m,t} = P_t d\left(\frac{1}{P_t}\right) = r_m dt - \sigma_P dW_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right) dQ_{P,t}, \tag{7}$$

donde $r_m = -\pi + \sigma_P^2$. El retorno estocástico por la tenencia de bonos se obtiene en forma similar como

$$dR_{b,t} = r_b dt - \sigma_P dW_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right) dQ_{P,t} \ , \tag{8}$$

donde $r_b = i - \pi + \sigma_P^2$. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados por la volatilidad y los posibles saltos en el nivel general de precios. La tasa de retorno de las acciones después de impuestos se denotará, por el momento, mediante

$$dR_{k,t} = r_k dt + \sigma_k dW_{k,t} + \nu_k dQ_{k,t} \ , \tag{9}$$

donde los procesos $dW_{k,t}$ y $dQ_{k,t}$ tienen características similares a los procesos definidos en (1).

Además del impuesto $\tau_c$ que se paga por el consumo, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma

$$d\tau_t = a_t \tau dt + a_t \sigma_\tau dW_{\tau,t} + a_t \nu_\tau dQ_{\tau,t} \ , \tag{10}$$

donde $\tau$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. Al igual que antes, $dW_{\tau,t}$ y $dQ_{\tau,t}$ comparten las mismas características que tienen el proceso de Wiener y el proceso de Poisson definidos en (1). La tendencia $\tau$, así como las componentes de difusión y salto $\sigma_\tau dW_{\tau,t}$ y $\nu_\tau dQ_{\tau,t}$, se determinan en forma endógena.

*2.4 Decisiones óptimas de los consumidores*

El objetivo del consumidor es elegir, en cada momento, el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximicen (5) sujeto a (6). Nótese que después de sustituir las expresiones (7)-(10) en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza, (6), ésta se transforma en

$$\frac{da_t}{a_t} = \left[ N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \tau \right] dt$$

$$+ \left[ N_{k,t} \sigma_k dW_{k,t} - (N_{m,t} N_{b,t}) \sigma_P dW_{P,t} - \sigma_\tau dW_{\tau,t} \right] \tag{11}$$

$$+ \left[ (N_{m,t} + N_{b,t}) \left( \frac{1}{1+\nu_P} - 1 \right) dQ_{P,t} + N_{k,t} \nu_k dQ_{k,t} - \nu_\tau dQ_{\tau,t} \right].$$

La solución del problema de maximización de utilidad total descontada sujeto a (11) y a la restricción de normalización

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1, \tag{12}$$

está dada por

$$c_t = \frac{\delta\theta}{(1+\tau_c)} a_t \tag{13}$$

$$0 = \frac{\delta(1-\theta)}{N_{m,t}} + \left[ r_m - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P^2 + N_{k,t} \sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - N_{m,t} - N_{b,t}) \nu_P} \right] - \delta\phi, \tag{14}$$

$$0 = \left[ r_b - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P^2 + N_{k,t} \sigma_{Pk} - \sigma_{P,\tau} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - N_{m,t} - N_{b,t}) \nu_P} \right] - \delta\phi \tag{15}$$

y

$$0=\left[r_k-N_{k,t}+\sigma_k^2+\left(N_{m,t}+N_{b,t}\right)\sigma_{Pk}+\sigma_{k\tau}+\frac{\lambda_k v_k}{1+\left(1-N_{m,t}-N_{b,t}\right)v_k}\right]-\delta\phi \qquad (16)$$

donde $\phi$ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (12). Después de restar (14) de (15) encontramos la proporción óptima de la riqueza asignada a la tenencia de saldos reales:

$$\hat{N}_{m,t}=\frac{\delta(1-\theta)}{i} \qquad (17)$$

Asimismo, después de restar (15) de (16) tenemos que

$$N_{k,t}B-A-\frac{\lambda_P v_P}{1+N_{k,t}v_P}-\frac{\lambda_k v_k}{1+N_{k,t}v_k}=0, \qquad (18)$$

donde

$$B\equiv\sigma_P^2+2\sigma_{Pk}+\sigma_k^2>0 \qquad (19)$$

y

$$A\equiv r_k-r_b+\sigma_P^2+\sigma_{Pk}+\sigma_{P\tau}+\sigma_{k\tau}. \qquad (20)$$

Claramente, la ecuación (18) es cúbica y, por lo tanto, tiene al menos una solución real, la cual denotaremos como $\hat{N}_{k,t}=\hat{N}_{k,t}(i)$. En particular, si suponemos que $v_P$ y $v_k$ son cero, de manera equivalente $\lambda_P=\lambda_k=0$, se tiene como única solución (Turnovsky, 1993):

$$\hat{N}_{k,t}\Big|_{v_P=v_k=0}=\frac{A}{B}. \qquad (21)$$

Si los parámetros de intensidad $\lambda_P$ y $\lambda_k$ se ajustan de tal manera que $\nu_P$ y $\nu_k$ sean de la misma magnitud, entonces (18) se transforma en una ecuación cuadrática cuyas soluciones están dadas por

$$\hat{N}_{k,t}\Big|_{\nu P=\nu k} = \frac{A\nu_P - B \pm \sqrt{(A\nu_P + B)^2 + 4B\nu_P^2(\lambda_P + \lambda_k)}}{2B\nu_P} \tag{22}$$

Obsérvese que el discriminante es positivo y, en consecuencia, ambas raíces son reales. Nótese también que en ningún caso se han impuesto restricciones para que las proporciones de la riqueza asignadas a la tenencia de activos sean estrictamente positivas y menores que la unidad. Por lo tanto, las ventas en corto de activos son permitidas en todo momento. Finalmente, el portafolio óptimo queda entonces determinado por completo con $\hat{N}_{,b}$ , el cual se obtiene a partir de $(12)$ como

$$\hat{N}_{b,t} = 1 - \frac{\delta(1-\theta)}{i} - \hat{N}_{k,t} \tag{23}$$

*2.5 Costo de oportunidad de saldos reales*

Obsérvese que las condiciones de primer orden se pueden escribir como

$$u'(c_t) = \frac{(1+\tau_c)}{\delta\, a_t} \tag{24}$$

$$\frac{v'(m_t)}{u'(c_t)}(1+\tau_c) = i > 0, \tag{25}$$

$$\frac{\upsilon'(m_t)}{u'(c_t)}(1+\tau_c) = \pi - \hat{N}_{k,t}(\sigma_P^2 + \sigma_{Pk}) + \sigma_{P\tau} + \frac{\lambda_P \nu_P}{1+\hat{N}_{k,t}\nu_P} + \delta\,\phi \tag{26}$$

Esta última ecuación iguala la utilidad marginal del dinero, estandarizada por la utilidad marginal del consumo, con el costo marginal de la tenencia de saldos monetarios reales (Venegas-Martínez, 2001). Esta condición muestra de manera explícita cómo el costo de oportunidad de mantener saldos reales es afectado por la incertidumbre, es decir, por cambios difusos en la tasa de inflación, los cuales están siempre presentes, y por movimientos extremos y repentinos en el nivel general de precios, que se presentan de manera ocasional. Observe que el costo de oportunidad de mantener saldos monetarios reales es positivo. En este caso, cabe destacar que dado que el dinero entra directamente en la función de utilidad, el signo en el costo de oportunidad de mantener saldos monetarios reales es irrelevante, contrario a lo que se tendría en el caso de una economía con una restricción *cash-in-advance*, donde un costo de oportunidad positivo obliga a los consumidores a mantener el mínimo posible de saldos reales para financiar su consumo. Por último, es importante destacar que la función de utilidad logarítmica implica que los valores óptimos de $\widehat{N}_{j,t}, j=m,b,k$ dependan únicamente de los parámetros que determinan las preferencias y las características estocásticas de la economía, razón por la cual las decisiones $\widehat{N}_{j,t}, j=m,b,k$ se mantendrán constantes a través del tiempo. En otras palabras, la actitud del consumidor hacia el riesgo en los instrumentos de inversión es independiente de su nivel de riqueza; es decir, el nivel resultante de riqueza en cualquier instante no tiene efecto alguno sobre las decisiones en la integración del portafolio.

## 3. Problema de decisión de las empresas

En este modelo, la empresa representativa produce el único bien que hay en el mercado, y el rendimiento que se paga a las acciones emitidas está en función de la producción y de la política de dividendos.

### *3.1 Especificación de la tecnología*

Suponemos que en esta economía la producción sigue una trayectoria estocástica definida por

$$dy_t = \gamma k_t dt + \gamma k_t \sigma_y dW_{y,t} + \gamma k_t \nu_y dQ_{y,t}, \tag{27}$$

donde $\gamma$ representa el producto marginal promedio esperado del capital. Aquí, como en el caso del consumidor, $dW_{y,t}$ es un proceso Wiener y $dQ_{y,t}$ es un proceso de Poisson.

### *3.2 Rendimiento de las acciones*

En términos generales, el rendimiento que paga la empresa sobre las acciones emitidas se puede definir como

$$dR_{k,t} = \frac{d\upsilon_t}{k_t} + \frac{du_t}{u_t} \tag{28}$$

donde $d\upsilon_t$ son los dividendos y $u_t$ es el precio de las acciones, en términos del producto. Suponemos que no hay impuestos sobre ganancias de capital.[2] De esta forma, el rendimiento de las acciones tiene dos componentes: los dividendos que se pagan por acción y las ganancias (o pérdidas) de capital que resultan de diferencias en el precio de los títulos de capital. A continuación examinamos cada componente por separado. Primero, para conocer la trayectoria que sigue $du_t / u_t$ es necesario analizar el comportamiento de la producción, el *stock* de acciones, el capital disponible y la política de inversión de la empresa. Todas estas variables determinan la posible existencia de ganancias de capital. Ahora bien, si suponemos que el *stock* de acciones en cualquier tiempo $t$ permanece constante, digamos igual a $N$, entonces se cumple que $Nu_t = k_t$. Por lo tanto,

$$dk_t = Ndu_t. \tag{29}$$

Por otra parte, la producción después de impuestos puede tener dos usos: el pago de dividendos, $d\upsilon_t$, o el financiamiento de nueva inversión, $dk_t$,

[2] En el caso mexicano, no hay impuestos sobre ganancias de capital cuando las operaciones se llevan a cabo en mercados reconocidos por las autoridades financieras, como es el caso de la Bolsa Mexicana de Valores.

entendida como la adquisición de capital nuevo. De esta forma, la trayectoria que sigue la producción después de impuestos está dada por

$$\left(1-\tau_p\right)dy_t = d\upsilon_t + dk_t \tag{30}$$

donde $\tau_p$ es el impuesto sobre ingresos corporativos y $\upsilon_t$ representa el pago de dividendos.

Combinando las ecuaciones (29) y (30) obtenemos

$$\frac{du_t}{u_t} = \frac{\left(1-\tau_p\right)dy_t - d\upsilon_t}{k_t} \tag{31}$$

y sustituyendo esta expresión en la ecuación del rendimiento de las acciones, (28), se sigue que

$$dR_{k,t} = \left(1-\tau_P\right)\frac{dy_t}{k_t}. \tag{32}$$

*3.3 Política de dividendos*

En este modelo suponemos que los dividendos que pagan las empresas son una fracción constante $\alpha$ del ingreso corporativo después de impuestos. Es decir, los dividendos tienen la forma

$$d\upsilon_t = \alpha\left(1-\tau_P\right)dy_t, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{33}$$

Después de sustituir esta expresión en la ecuación (32), obtenemos la trayectoria estocástica del rendimiento de las acciones en términos de los procesos de difusión que sigue la producción de bienes:

$$dR_{k,t} = \left(1-\tau_P\right)\frac{dy_t}{k_t}. \tag{34}$$

Es importante observar en esta ecuación que el componente estocástico está determinado por $dy_t$, ya que el resto de las variables son deterministas. Finalmente, de la ecuación $(9)$ se sigue que

$$r_k = (1-\tau_P)\gamma \tag{35}$$

$$\sigma_k dW_{k,t} = (1-\tau_P)\gamma\sigma_y dW_{y,t} \tag{36}$$

y

$$v_k dQ_{k,t} = (1-\tau_P)\gamma v_y dQ_{y,t}. \tag{37}$$

De esta forma, la tasa de rendimiento de las acciones está en función de la tasa del producto marginal del capital. De manera similar, el componente estocástico $dR_{k,t}$ depende de los impactos de productividad derivados de cambios en $\gamma$ y del comportamiento exógeno de $dW_{y,t}$, además de los posibles saltos $dQ_{y,t}$.

## 4. Comportamiento del gobierno

A fin de cerrar el modelo se describen las acciones del gobierno. En este modelo, el sector público no genera utilidad para los consumidores. El gobierno tiene el monopolio de la emisión de dinero y, a la vez, emite deuda para financiar su gasto. En esta sección se analizan los tres principales instrumentos de política económica que emplea el gobierno, a saber: gasto público, oferta monetaria y emisión de deuda. La restricción presupuestal enfrentada por el gobierno en términos reales tiene la forma

$$dg_t - d\tau_{1,t} - d\tau_{2,t} + m_t dR_{m,t} + b_t dR_{b;t} = dm_t + db_t \tag{38}$$

donde $dg_t$ es el cambio en el gasto público del gobierno en términos reales; $d\tau_{1,t}$ es el cambio en el impuesto total recaudado proveniente de los consumidores, en términos reales; $d\tau_{2,t}$ es el cambio en el impuesto total recaudado proveniente de las empresas, también en términos reales.

### *4.1 Gasto público*

En este modelo el gasto que realiza el gobierno sigue un proceso estocástico definido por

$$dg_t = \bar{g}\gamma k_t dt + \gamma k_t \sigma_g dW_{g,t} + \gamma k_t \nu_g dQ_{d,t}. \tag{39}$$

Al igual que en los casos anteriores, $dW_{g,t}$ es un proceso estocástico con una distribución normal con media cero y varianza $dt$, y $dQ_{g,t}$ es un proceso de Poisson. De esta forma, el gasto de gobierno está definido como una fracción $dg_t$ del producto real. Nótese que, en este caso, el factor estocástico del gasto es proporcional al producto.

### *4.2 Oferta monetaria*

La oferta monetaria en esta economía tiene asociada una regla de expansión de la oferta monetaria que es conducida por un proceso estocástico de difusión con saltos de la forma

$$dM_t = \mu M_t dt + \sigma_M M_t dW_{M,t} + \nu_M M_t dQ_{M,t} \tag{40}$$

donde $\mu$ es la tasa de expansión monetaria media esperada, $dW_{M,t}$ es el componente de difusión y $dQ_{M,t}$ es el componente de saltos en la tasa de expansión monetaria.

### *4.3 Deuda pública*

La política de deuda que sigue el gobierno se hace vía emisión de bonos. En este caso, la política de endeudamiento se fija de forma tal que la razón entre el *stock* de bonos y el *stock* monetario se mantenga constante; es decir, se supone que

$$\frac{B_t}{M_t} = k = \text{constante}. \qquad (41)$$

De esta forma, obtenemos la expresión

$$\frac{dB_t}{B_t} = \frac{dM_t}{M_t}. \qquad (42)$$

Lo anterior significa que en operaciones de mercado abierto, el cambio porcentual de deuda emitida es igual al cambio porcentual de los cortos en la economía; o, de manera equivalente, el cambio porcentual en la cantidad que crece la oferta monetaria es igual al cambio porcentual de la deuda gubernamental que se salda.

### *4.4 Impuestos directos e indirectos*

A continuación se describen los cambios en las cantidades reales de tributación, $d\tau_{1,t}$ y $d\tau_{2,t}$, que provienen de los consumidores y de las empresas, respectivamente. Todas las tasas $\tau_P$ y $\tau_c$ son exógenas en nuestro modelo.

En el caso de los consumidores, el impuesto total tiene cuatro componentes: tasa impositiva sobre los intereses, ganancias de capital, nivel de riqueza y consumo. De esta forma, las cantidades respectivas se agregan como sigue:

$$d\tau_{1,t} = a_t \tau \bar{\tau} dt + a_t \sigma_\tau dW_{\tau,t} + a_t \nu_\tau dQ_{\tau,t} + \tau_c c_t dt. \qquad (43)$$

Para las empresas, los impuestos se gravan sobre los ingresos corporativos. Es decir,

$$d\tau_{2,t} = \tau_P \gamma k_t \left[ dt + \sigma_y dW_{y,t} + \nu_y dQ_{y,t} \right] \qquad (44)$$

## 5. Equilibrio macroeconómico

### *5.1 Equilibrio en el sector real*

Para encontrar la trayectoria que sigue la acumulación de capital en esta economía, $\frac{dk_t}{k_t}$, partimos de la identidad de la renta (o ingreso) nacional:

$$dy_t = c_t dt + dk_t + dg_t. \tag{45}$$

Al sustituir en (45) las ecuaciones (13), (27) y (39), que corresponden a la trayectoria óptima del consumo, a la dinámica de producción y a la política de gasto del sector público respectivamente, obtenemos

$$\frac{dk_t}{k_t} = \left[\gamma\,(1-\bar{g}) - \frac{\delta\,\theta}{(1+\tau_c)\hat{N}_{k,t}}\right]dt + \gamma\left(\sigma_y dW_{y,t} - \sigma_g dW_{g,t}\right) + \gamma\left(v_y dQ_{g,t}\right) \tag{46}$$

De esta forma, la acumulación de capital sigue una trayectoria estocástica derivada de la diferencia entre la producción menos el consumo y el gasto del gobierno. En consecuencia, el componente no estocástico de esta ecuación está determinado por

$$\psi \equiv E\left[\frac{dk_t}{k_t}\right] = \gamma(1-\bar{g}) - \frac{\delta\,\theta}{(1+\tau_c)\hat{N}_{k,t}}, \tag{47}$$

lo que define la tasa esperada de crecimiento.

Finalmente, podemos concluir que

$$E\left[\left(\frac{dk_t}{k_t}\right)^2\right] = \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right)dt + \gamma^2\left(v_y^2\lambda_y + v_g^2\lambda_g\right)dt. \tag{48}$$

Este resultado se utilizará en la determinación del equilibrio general.

## *5.2 Determinación de la tasa de inflación de equilibrio*

Una vez determinadas las decisiones óptimas de los agentes, el comportamiento de las empresas y las acciones del gobierno, así como el establecimiento de las variables exógenas, lo que resta es obtener el equilibrio macroeconómico general. Dado que en esta economía los saldos monetarios reales y los bonos en términos reales están ligados a los movimientos en el nivel general de precios, es necesario, en primera instancia, especificar el comportamiento que sigue la inflación y la forma como ésta es generada de manera endógena por el modelo mismo.

Las cantidades $\hat{N}_{j,t}, j = m,b,k$, así como la tasa de interés nominal, son variables endógenas. Nótese que podemos expresar el nivel de precios en la forma

$$P_t = \frac{\hat{N}_{k,t}}{\hat{N}_{m,t}} \frac{M_t}{k_t} \tag{49}$$

Dado que los valores óptimos de $\hat{N}_{j,t}, j = m,b,k$ son constantes, derivando estocásticamente la razón entre dinero y capital $f(M_t, k_t) = \frac{M_t}{k_t}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{M_t}{k_t}\right)}{\frac{M_t}{k_t}} &= \left(\mu - \left[\gamma(1-\bar{g}) - \frac{c_t}{k_t}\right] + \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right) - \gamma\sigma_{My}\right)dt \\ &\quad + \sigma_M dW_{M,t} - \gamma\left(\sigma_y dW_{y,t} - \sigma_g dW_{g,t}\right) \qquad (50) \\ &\quad + \nu_M dQ_{M,t} + \left(\frac{1}{(1+\gamma\nu_y)} - 1\right)dQ_{y,t} - \left(\frac{1}{(1+\gamma\nu_g)} - 1\right)dQ_{g,t}.\end{aligned}$$

donde $\sigma_{My} = Cov(dW_{M,t}, dW_{y,t})$. La condición de primer orden del consumo conduce a

$$\frac{c_t}{k_t} = \frac{\theta\,\delta}{(1+\tau_c)\hat{N}_{k,t}} \tag{51}$$

donde la $i^*$ se determina posteriormente. De (49) sabemos

$$\pi\,dt + \sigma_P dW_{P,t} + v_{P,t} = \frac{d\left(\frac{M_t}{k_t}\right)}{\frac{Mt}{kt}}. \tag{52}$$

Por lo tanto, la tasa esperada de inflación en el equilibrio satisface

$$\pi^* = \mu - \left[\gamma(1-\bar{g}) - \frac{\theta\delta}{(1+\tau_c)\hat{N}_{k,t}}\right] + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) - \gamma\,\sigma_{My}. \tag{53}$$

Las componentes estocásticas de difusión y saltos satisfacen, respectivamente, las siguientes condiciones:

$$\sigma_P dW_{P,t} = \sigma_M dW_{M,t} - \gamma(\sigma_y dW_{y,t} - \sigma_g dW_{g,t}), \tag{54}$$

y

$$v_P dQ_{P,t} = v_M dQ_{M,t} + \frac{\gamma v_y}{(1+\gamma v_y)} dQ_{y,t} - \frac{\gamma v_g}{(1+\gamma v_g)} dQ_{g,t}. \tag{55}$$

Las ecuaciones anteriores, (53)-(55), determinan en forma endógena la tasa de inflación esperada consistente con un portafolio cuya integración es constante en el tiempo. Podemos observar en (53) que la inflación media esperada de equilibrio depende positivamente de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria, y negativamente de la tasa de acumulación de capital, así como positivamente de las varianzas de los impactos fiscales y productivos. Por otra parte, las ecuaciones (54) y (55) determinan en forma endógena los componentes estocásticos de difusión y saltos, respectivamente, en la tasa de inflación. Es importante destacar que la componente de saltos en la tasa de inflación está en función de las componentes estocásticas de los saltos en las tasas de expansión monetaria, la producción y el gasto de gobierno.

*5.3 Determinación del nivel de impuestos de equilibrio*

Para determinar los ajustes endógenos en los impuestos que recauda el gobierno, los cuales son necesarios para satisfacer la restricción presupuestal, primero sustituimos en la restricción presupuestal del gobierno (38) las ecuaciones respectivas a la política de gasto (39), la regla de crecimiento de la oferta monetaria (40) y la política de deuda (41), de donde obtenemos

$$\hat{N}_{m,t}\frac{d\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}}+\hat{N}_{b,t}\frac{d\left(\frac{B_t}{P_t}\right)}{\frac{B_T}{P_t}}=\frac{\gamma k_t}{a_t}\left[\bar{g}dt+\sigma_g dW_{g,t}+\nu_g dQ_{g,t}\right]-\frac{\left(d\tau_{1,t}+d\tau_{2,t}\right)}{a_t}$$

$$+\hat{N}_{m,t}dR_{m,t}+\hat{N}_{b,t}dR_{b,t}. \qquad (56)$$

o bien, la ecuación se puede reescribir como

$$\left(\hat{N}_{m,t}+\hat{N}_{b,t}\right)\frac{d\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}}=\frac{\gamma k_t}{a_t}\left[\bar{g}dt+\sigma_g dW_{g,t}+\nu_g dQ_{g,t}\right]-\frac{\left(d\tau_{1,t}+d\tau_{2,t}\right)}{a_t}$$

$$+\hat{N}_{m,t}dR_{m,t}+\hat{N}_{b,t}dR_{b,t}. \qquad (57)$$

Después de emplear el lema de Itô para obtener la diferencial $df\left(M_T,P_t\right)=d\left(\frac{M_t}{P_t}\right)$ y sustituir las $d\tau_{1,t}$ y $d\tau_{2,t}$ en (57), se tiene que las componentes determinista y estocástica del nivel de impuestos equilibrio están dadas por

$$\begin{aligned}\tau^* &= \gamma\,\hat{N}_{k,t}\bar{g} - \left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\mu + \hat{N}_{b,t}i - \tau_p\gamma\,\hat{N}_{k,t} \\ &+ \left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\sigma_{MP} - \tau_c\frac{\theta\delta}{(1+\tau_c)},\end{aligned} \tag{58}$$

$$\sigma_\tau dW_{\tau,t} = -\left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\sigma_M dW_{M,t} + \gamma\,\hat{N}_{k,t}\sigma_g dW_{g,t} - \tau_p\gamma\,\hat{N}_{k,t}\sigma_y dW_{y,t} \tag{59}$$

$$\nu_\tau dQ_{\tau,t} = -\left[\hat{N}_{m,t} + \hat{N}_{b,t}\right]\nu_M dQ_{M,t} + \gamma\,\hat{N}_{k,t}\nu_g dQ_{g,t} - \tau_p\hat{N}_{k,t}\gamma\,\nu_y dQ_{y,t}. \tag{60}$$

De esta forma, la ecuación (58) describe el ajuste endógeno en el componente determinista, mientras que la ecuación (59) lo hace en la parte estocástica en función de las fluctuaciones del crecimiento de la oferta monetaria, $\sigma_M dW_{M,t}$, del gasto de gobierno, $\sigma_g dW_{g,t}$, y del sector real, $\sigma_y dW_{y,t}$. La componente de saltos que es la ecuación (60) está en función del componente estocástico de saltos en la tasas de expansión monetaria, la producción y el gasto de gobierno.

### *5.4 Relaciones de equilibrio*

Para presentar en forma reducida el equilibrio macroeconómico, expresamos las varianzas y covarianzas relevantes en términos de los impactos estocásticos exógenos, $dW_{M,t}$, $dW_{y,t}$, y $dW_{g,t}$. En este caso suponemos que $dW_{M,t}$ y $dW_{y,t}$ están correlacionados entre sí. A partir de las ecuaciones (46), (54), (36) y (60) obtenemos las expresiones de las perturbaciones estocásticas $\sigma_P dW_{P,t}$, $\sigma_k dW_{k,t}$ $\sigma_\tau dW_{\tau,t}$ en términos de los impactos estocásticos exógenos $dW_{M,t}, dW_{y,t}$ y $dW_{g,t}$. Como en este modelo suponemos que las perturbaciones exógenas no están correlacionadas, las varianzas y covarianzas relevantes se pueden reescribir en términos de parámetros exógenos como

$$
\begin{cases}
\sigma_P^2 = \sigma_M^2 + \gamma^2\left(\sigma_Y^2 + \sigma_G^2\right) - 2\gamma\sigma_{My}, \\
\sigma_k^2 = \left(1-\tau_p\right)^2 \gamma^2 \sigma_y^2, \\
\sigma_\tau^2 = \left(1-\hat{N}_{k,t}\right)^2 \sigma_M^2 + \gamma^2 \hat{N}_{k,t}^2 \sigma_g^2 \tau_p^2 \gamma^2 \hat{N}_{k,t}^2 \sigma_y^2 \\
\qquad + 2\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\tau_p \gamma \hat{N}_{k,t}\sigma_{My}, \\
\sigma_{Pk} = \left(1-\tau_p\right)\gamma\left(\sigma_{My} - \gamma\sigma_y^2\right), \\
\sigma_{P\tau} = -\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\sigma_M^2 - \tau_p \gamma \hat{N}_{k,t}\sigma_{My} \\
\qquad + \left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\gamma\sigma_{My} - \tau_p \gamma^2 \hat{N}_{k,t}\sigma_y^2 + \gamma^2 \hat{N}_{k,t}\sigma_g^2, \\
\sigma_{k\tau} = -\left(1-\tau_p\right)\left(1-\hat{N}_{k,t}\right)\gamma\sigma_{My} \\
-\tau_p\left(1-\tau_p\right)\left(1-\alpha\tau_y\right)\gamma^2 \hat{N}_{k,t}\sigma_y^2,
\end{cases} \tag{61}
$$

Así, la tercera igualdad indica que la varianza de la tasa de rendimiento de las acciones, $\sigma_k^2$, depende de la política de dividendos y los impuestos sobre ingresos corporativos y sobre rendimientos por la tenencia de bonos.

Para encontrar las tasas de retorno de equilibrio de los saldos monetarios y bonos en términos reales, sustituimos las expresiones anteriores en los retornos dados en (7) y (8), respectivamente, de tal forma que el retorno de los saldos reales está dado por

$$
r_m^* = -\pi + \sigma_M^2 + \gamma^2\left(\sigma_y^2 + \sigma_g^2\right) - 2\gamma\sigma_{My}. \tag{62}
$$

La siguiente identidad es válida en todo tiempo $t$:

$$
N_{k,t} = 1 - \frac{(1+k)\delta\,(1-\theta)}{i}
$$

Después de sustituir el valor óptimo de la proporción de la riqueza asignada a la tenencia de títulos de capital, se obtiene la tasa de interés de equilibrio, es decir,

$$i^* = \frac{(1+k)\delta(1-\theta)}{\left(1-\hat{N}_{k,t}(i^*)\right)} \tag{63}$$

De esta forma, la ecuación anterior determina en forma implícita el valor de equilibrio de la tasa de interés nominal. Entonces el retorno de los bonos está dado por

$$r_b^* = i^*(1-\tau_y) - \pi + \sigma_M^2 + \gamma^2(\sigma_y^2 + \sigma_g^2) - 2\gamma\sigma_{My}. \tag{64}$$

La $r_k$ está dada por la ecuación (35).

Finalmente, de la ecuación (51) se sigue que

$$\frac{c_t}{k_t} = \frac{\theta\delta}{(1+\tau_c)\left[1 - \frac{(1+k)\delta\,(1-\theta)}{i^*}\right]}, \tag{65}$$

lo que, junto con la ecuación (47), nos conduce a la tasa esperada de crecimiento del capital

$$\psi = \gamma\left[1 - \frac{\theta\delta}{\gamma(1+\tau_c)\left[1 - \frac{(1+k)\delta(1-\theta)}{i^*}\right]} - g\right].$$

## 6. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo de equilibrio macroeconómico en un ambiente estocástico. Las variables exógenas incluyen los parámetros de política económica (crecimiento monetario, $\mu$ ; gasto público, $\bar{g}$ ; política de deuda, *k;* y las tasas de impuesto $\tau_c$ y $\tau_p$. De igual forma, los procesos estocásticos exógenos son los respectivos al crecimiento monetario, $dW_{M,t}$, el gasto público, $dW_{g,t}$, y la producción, $dW_{y,t}$. El resto de los procesos estocásticos son endógenos y pueden expresarse como funciones simples de los impactos exógenos. Asimismo, se determinó el equilibrio macroeconómico en donde las varianzas de los impactos exógenos, tanto para difusiones como para saltos, desempeñan un papel importante en la administración de riesgos.

El modelo presentado puede extenderse al caso de una economía abierta y pequeña con ajustes menores suponiendo que el precio de la economía doméstica, $P_t$, satisface la condición de poder de paridad de compra $p_T = P_t^* E_t$, donde $P_t^*$ es el precio (en dólares) de los bienes en el resto del mundo y $E_t$ es el tipo de cambio. Para simplificar, supongamos que $P_t^* \equiv 1$; entonces el nivel general de precios, $P_t$, es igual al tipo de cambio, $E_t$. De esta manera $(dP_t / P_t) = (dE_t / E_t)$ y la tasa de depreciación del tipo de cambio tendrían el comportamiento estocástico definido en (1). Por otro lado, si se incluyen bonos internacionalmente comerciables denominados en moneda $B_t^*$ o en términos reales, $b_t^* = E_t B_t^* / P_t$, la riqueza del individuo estaría dada por $a_t = m_t + b_t + b_t^* + k_t$ y el portafolio de inversión contemplaría la tenencia de bonos internacionales, los cuales estarían en poder tanto de los particulares como del sector público. Lo anterior requiere modificaciones en las restricciones presupuestales tanto de los consumidores como del gobierno, así como consideraciones sustanciales en la balanza de pagos de las cuentas nacionales. En este caso, las complicaciones técnicas serían mayores.

Por último, se llevó a cabo un análisis empírico para determinar en qué años la economía mexicana alcanzó el equilibrio estocástico sugerido por el modelo propuesto.

## Bibliografía


Cárdenas, E. *La política económica en México, 1950-1994*, El Colegio de México/Fideicomiso Historia de las Américas/Fondo de Cultura Económica, México, 1996.

Mariña, F. Abelardo. "Formación y acervos de capital en México", *Análisis Económico*, núm. 34, 1992, pp. 231-256.

Penati, A. y G. Pennacchi. **"**Optimal Portfolio Choice and the Collapse of a Fixed-Exchange Rate Regime**"**, *Journal of International Economics*, núm. 27, 1989, pp. 1-24.

Svensson, L. E. O. "The Foreign Exchange Risk Premium in a Target Zone with Devaluation Risk", *Journal of International Economics*, núm. 33, 1992, pp. 21-40.

Turnovsky, S. J. "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 34, núm. 4, 1993, pp. 953-981.

Venegas-Martínez, F. "On Consumption, Investment, and Risk", *Economía Mexicana* (Nueva Época), vol. 9, núm. 2, 2000, pp. 227-244.

Venegas-Martínez, F. "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 25, núm. 9, 2001, pp. 1429-1449.

Venegas-Martínez, F. "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos", *Estudios Económicos*, vol. 16, núm. 32, 2001a, pp. 203-226.