La inconsistencia dimensional del modelo Solow-Swan de crecimiento económico

M. David Álvarez Hernández [1]

Miguel Álvarez Texocotitla [2]

Resumen

El presente artículo de investigación tiene como propósito fundamental el comprobar la siguiente hipótesis: desde la perspectiva del análisis dimensional, el modelo Solow-Swan de crecimiento económico tiene una falla analítica importante, su inconsistencia dimensional. Con el fin de alcanzar ese objetivo, se utilizan las herramientas del análisis dimensional para evaluar el modelo. Asimismo, se propone una corrección al modelo que cumpla con el principio de homogeneidad dimensional y se señalan las implicaciones de esas modificaciones.

Palabras clave: Análisis Dimensional, Economía Matemática, Modelos de Crecimiento Económico.

Abstract

The present research article has as fundamental purpose the corroboration of the following hypothesis: from the perspective of dimensional analysis, the Solow-Swan model of economic growth holds an important analytic flaw, its dimensional inconsistency. To fulfill this objective, instruments of dimensional analysis are used to evaluate the model. Furthermore, an improvement of the model is proposed so that it complies with the dimensional homogeneity principle, and where the implications of these alterations are also discussed.

1 King´s College London, Department of Mathematics.

2 Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Departamento de Economía, Área de Teoría Económica.

Keywords: Dimensional Analysis, Mathematical Economics, Economic Growth Models.

Clasificación JEL/JEL *Classification: A12, C02, C65, O40*

Introducción

Para entender el funcionamiento de un sistema económico-social se pueden establecer relaciones entre las variables fundamentales del sistema, las cuales se analizan utilizando modelos matemáticos. Esta modelación matemática tiene exigencias analíticas que deben tomarse en cuenta, sobre todo si se pretende que el modelo tenga una correspondencia con la realidad y no sea éste una mera abstracción matemática. Estas exigencias, que analizaremos en el presente artículo, son el área de estudio de lo que se conoce como análisis dimensional.

El análisis dimensional estudia las propiedades de las cantidades observables con dimensiones y de las relaciones matemáticas que las incorporan. Además, se aplica en las ciencias naturales; de hecho sus principios (dimensión, homogeneidad, medición y unidad) son claves en la formación del pensamiento científico ya que son parte de los principios básicos de la ciencia. El cumplimiento de los principios del análisis dimensional, y en especial el principio de la homogeneidad dimensional, es un requisito básico y necesario para realizar una apropiada modelación matemática, ya que permite comprobar *ex post* la consistencia dimensional de las relaciones matemáticas y señala las restricciones funcionales a las relaciones que se proponen entre las variables.

Sin embargo, en algunas disciplinas, como es el caso de la economía, el concepto de dimensión y sus respectivos principios son prácticamente desconocidos. Son muy pocas las investigaciones que han hecho hincapié en las implicaciones del análisis dimensional en la disciplina económica, entre ellas se tienen las de Grudzewski y Roslanowska (2013), cuyo libro de texto, de reciente publicación, proporciona un trabajo extenso sobre el uso y aplicaciones del análisis dimensional en la modelación económica; Barnett II (2004), quien analizó la consistencia dimensional de las funciones de producción, y en específico la función de Cobb-Douglas; Shone (2002) proporciona una breve pero acertada introducción al uso de las dimensiones en los modelos económicos y De Jong (1972), quien, posiblemente, fue el primero que señaló la importancia de la congruencia dimensional, y la falta de ella, en los modelos económicos. Esta insuficiencia de estudios es una de las razones que nos motiva a reconsiderar esta importante área del modelado matemático, ya que el análisis dimensional puede ofrecer nuevas perspectivas sobre la forma en que se construyen los modelos económicos, y en algunos casos permitirá corregir los errores e insuficiencias que pudieran contener.

La investigación sobre las dimensiones representa una crítica fundamental a la metodología que se sigue en la modelación económica. Pese a que los modelos económicos puedan estar sustentados en una teoría sólida, puede ser que en la construcción de los mismos no se contemplen las restricciones que existen al modelar fenómenos de distinta índole. Esta situación haría necesaria una revisión cuidadosa de los modelos económicos desde la perspectiva del análisis dimensional, y en particular, de los modelos de crecimiento económico.

En este contexto, el presente estudio tiene como propósito fundamental la validación de la siguiente hipótesis: desde la perspectiva del análisis dimensional, el modelo de Solow-Swan de crecimiento económico, tiene una falla analítica importante: su inconsistencia dimensional[3].

Para alcanzar ese objetivo, en la primera sección se examinan los aspectos básicos del análisis dimensional, principalmente el concepto de homogeneidad dimensional, pero enfocado al campo de la economía. En esta sección, bajo la perspectiva del análisis dimensional, se examinan algunas relaciones económicas fundamentales que subyacen a los modelos de crecimiento económico. En la última sección, con el pro-

3 La elección de este modelo se puede justificar en tanto que constituye la estructura básica de numerosos modelos de crecimiento económico que han surgido posteriormente, y, además, representa un buen punto de partida para realizar un análisis dimensional de un modelo económico debido a su sencilla formulación matemática.

pósito de evaluar la construcción del modelo Solow-Swan, se explora la dimensionalidad del modelo. Desde el punto de vista del análisis dimensional el modelo adolece de fallas, las cuales son posibles de corregir, pero a costa de enfrentar nuevas implicaciones teóricas y analíticas.

1. El Análisis Dimensional

Las teorías científicas son construcciones lógico abstractas que buscan explicar y predecir fenómenos, ya sean naturales, biológicos o sociales. La construcción de cualquier teoría científica inicia con la observación y la descripción de los fenómenos o eventos de interés, para inferir (a partir de esas observaciones y descripciones) leyes, patrones y relaciones que representen al fenómeno de interés en la forma más simple y general posible. Para cumplir dicho propósito, la ciencia se vale del lenguaje matemático, de hecho, se podría aseverar que mientras una teoría no esté formulada con precisión en el lenguaje de la matemática no es posible evaluar su relevancia ni su capacidad de predicción.

Sin embargo, el uso del lenguaje matemático tiene restricciones, ya que su utilización conlleva el cumplimiento de ciertas reglas. Estas reglas que se imponen en las posibles leyes y relaciones que surgen de la aplicación de las teorías matemáticas están relacionadas con las propiedades de las cantidades que son posibles de incluirse en un análisis cuantitativo[4].

Las cantidades que son posibles de cuantificar y de describirse por medio del lenguaje matemático, o, dicho de otra forma, que son posibles de medir y de asignar un valor numérico, reciben la denominación de observables[5].

4 Aquí entendemos por cantidad a la descripción de alguna percepción sensorial o propiedad tangible. Por ejemplo, la noción de espacio (una propiedad física) es perceptible a través de múltiples cantidades, ya sea como distancias, áreas o volúmenes.

5 Bunge (1971), Carlson (1979), Sonin (2001), White (2011) y Balaguer (2013) utilizan la denominación de observables físicas, sin embargo, en este trabajo abandonamos el adjetivo físico para recalcar que las reglas del análisis dimensional se aplican de igual forma a las observables económicas.

Por otro lado, el uso de las herramientas matemáticas es enriquecido con un axioma, el cual se deriva de una idea muy simple pero fundamental: las relaciones matemáticas que se derivan de una teoría científica deben relacionar fenómenos de una naturaleza similar, tal que pueda establecerse una relación de causa/efecto. Utilizando la jerga del análisis dimensional, podemos decir que las relaciones matemáticas de la teoría deben ser *equidimensionales*.

La adopción de este axioma implica adoptar un criterio de validación. Una relación matemática es válida si en ambos lados de la igualdad (pensando en una ecuación algebraica, por ejemplo) se encuentran términos que sean iguales o similares. Sin embargo, decir sólo de forma intuitiva que dos observables son similares o iguales deja una profunda sensación de insuficiencia, ya que, ¿cómo definir qué es similar, o que es diferente? Es en este contexto que se introdujo el concepto de dimensión, el cual permite manejar, con un formalismo matemático más fundamentado, el axioma de *similaridad* [6].

El axioma de similaridad, o como se conoce en la literatura, el principio de homogeneidad dimensional, dice básicamente lo siguiente: si una relación matemática representa realmente una relación adecuada entre diversas observables de una cierta teoría, entonces dicha relación es homogénea, es decir, cada uno de los términos aditivos de dicha relación serán *equidimensionales*.

1.1 El Análisis Dimensional en la Teoría Económica

El análisis dimensional tiene sus raíces en la naturaleza de los artificios que se han construido con el fin de describir el mundo físico y explicar su funcionamiento en términos cuantitativos. Su origen puede ser rastreado desde las formulaciones geométricas que realizaban los matemáticos griegos de la antigüedad. Sin embargo, su fundamento moderno comenzó a ser establecido hace dos siglos, y fue principalmente en el

6 En este contexto, el concepto de dimensión se puede entender como la descripción cualitativa de alguna propiedad física, la cual puede compartir diferentes tipos de observables.

siglo XX que se adoptó su uso de forma extensa en las ciencias naturales (Macagno, 1971).

La primera persona que escribió acerca del problema de las unidades y las dimensiones (enfocado esencialmente a los modelos y teorías de la física) fue Leonard Euler en 1765. Por su parte, Joseph Fourier en su libro *The Analytic Theory of Heat*, publicado en 1822, remarcaba lo que ahora se conoce como el principio de la homogeneidad dimensional, e incluso desarrolló algunas de las reglas que se utilizan actualmente en el análisis dimensional. Posteriormente, no ocurrieron avances significativos en el área hasta la publicación del libro de Lord Rayleigh en 1877, *The Theory of Sound*, el cual proponía un método muy similar al método moderno de dimensiones y daba numerosos ejemplos de cómo utilizar el análisis dimensional. No obstante, de las anteriores contribuciones, la más notoria, que planteó el método y las reglas actuales del análisis dimensional, es la de E. Buckingham, quien en 1914 estableció la formalización más utilizada del análisis dimensional.

Por lo que respecta al campo de la economía, prácticamente en sólo pocos textos se hace referencia a las dimensiones y unidades que se utilizan para clasificar las observables económicas; en el mejor de los casos, cuando se mencionan, el análisis es insuficiente. Aun así, algunas nociones sobre las dimensiones se han hecho patentes en De Jong (1972) y en Shone (2002); en particular este último, remarca la distinción entre dos tipos principales de observables económicas: las observables de tipo *stock* (acervo) y las observables de tipo flujo.

Las observables de tipo *stock* hacen referencia al valor de una cierta cantidad económica en una fecha determinada (es decir en un punto instantáneo del tiempo). Por ejemplo, supongamos que nuestra observable económica es la cantidad de dinero (Ms) en la economía. Esta observable tiene un valor definido para cada instante del tiempo, digamos por ejemplo al 31 de diciembre, y tendrá otro valor definido ($M´s$) para cualquier otro instante de tiempo anterior o posterior. Es decir, el carácter de una observable *stock* es independiente del tiempo.

Por el contrario, una observable de tipo flujo hace referencia al valor total o promedio de una cierta cantidad económica en un intervalo de tiempo. Por ejemplo, si consideramos la demanda de bienes (*D*) en un periodo de tiempo determinado, digamos en un año, dicha observable es de tipo flujo, ya que estamos hablando de una cantidad económica que se distribuye en el tiempo, y por ende su valor está definido en dicho intervalo. En consecuencia, dichas observables tienen una dependencia directa con el tiempo.

Si suponemos que las observables de *stock* y flujo están representadas por funciones continuas y diferenciables, la relación que existe entre un *stock* y un flujo se puede representar matemáticamente como:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = F(t) \tag{1}$$

Donde *Q(t)* es la función asociada a una observable tipo *stock* y *F(t)* es la función asociada a la observable tipo flujo. Por lo tanto, cualquier observable tipo *stock* tendrá dimensiones que no involucren al tiempo[7].

Otra forma de ver la diferencia entre un *stock* y un flujo es pensar a *F(t)* como el equivalente a una tasa de cambio (es decir una velocidad) de una determinada cantidad o activo, en este caso *Q(t)*. En consecuencia, dada su diferencia, la única manera en que ambas observables pudieran ser iguales, o *equidimensionales*, será a través de la utilización de otro término que homogeneiza las dimensiones de la relación. En este caso, el término que homogeneiza la relación es el operador derivada, ya que dicho operador transforma *Q(t)* de un *stock* a un flujo *F(t)*.

Por lo tanto, un *stock* y un flujo no son *equidimensionales*, es decir, no pueden ser comparados, igualados, sumados o restados, ya que dichas operaciones no están definidas para operar entre observables no *equidimensionales*. Esta diferencia en las dimensiones de los stocks y

7 Nótese que a pesar de que las variables sean funciones del tiempo no implica que incorporen alguna dimensión temporal, sólo cuando está incorporada explícitamente alguna variable temporal, como es el caso del operador derivada, las dimensiones de la variable incorporan una dimensión temporal (T).

de los flujos impone restricciones que se deben tomar en consideración, sobre todo cuando se combinan observables de diferente naturaleza.

¿Cómo enfrentar la incongruencia dimensional de las observables económicas? Fuera del campo de la Física, la elección de las dimensiones fundamentales no es tan clara, y depende mucho del área de aplicación y de la teoría utilizada. Por ejemplo, en el campo de la economía parecería ser suficiente tener como dimensiones fundamentales el tiempo *(T)*, el valor monetario *(M)*, la cantidad de bienes *(Q)*, y la utilidad *(U)*. Con estas dimensiones fundamentales posiblemente se podrán expresar todas las dimensiones de las observables económicas.

De esta manera, consideremos que dentro de la teoría económica existe el siguiente conjunto de dimensiones, el cual utilizaremos a lo largo del presente artículo[8]:

- Valor Monetario *(M)*
- Utilidad *(U)*
- Cantidad *(Q)*
- Tiempo *(T)*

1.2 El Análisis Dimensional en los Modelos de Crecimiento Económico.

Consideremos el caso de una economía cerrada que contiene sólo dos agentes económicos: un hogar y una empresa[9]. Ambos intercambian en el mercado un sólo bien de consumo/producción, el cual denotamos

8 Dicho conjunto de dimensiones se propone en Shone (2002). La justificación de por qué dicho conjunto es adecuado y suficiente es una cuestión que aún está por determinarse. No obstante, dicho conjunto presenta un buen punto de partida para incorporar la cuestión de las dimensiones a la teoría económica neoclásica, ya que no parece haber características económicas más fundamentales que las representadas por estas cuatro dimensiones.

9 Ambos se pueden considerar como los agregados o representantes de todos los demás agentes del sistema, por lo tanto, también reciben los nombres de hogar y empresa representativos.

como capital físico. Este único bien representativo se utiliza simultáneamente como un insumo de producción y como un bien de consumo[10].

Además, de la existencia de un solo bien de consumo/producción, suponemos que existe otro factor económico, el cual afecta únicamente al proceso productivo (es decir, sólo funciona como un insumo de producción). A este factor se le denomina trabajo. La combinación de ambos factores (capital físico y trabajo) tiene lugar en el proceso productivo y desemboca en la producción de más capital físico, el cual puede o no utilizarse nuevamente en el proceso productivo.

Siguiendo las hipótesis convencionales de la teoría del crecimiento económico, consideremos que la estructura del mercado donde participan ambos agentes es de competencia perfecta. Es decir, el hogar y la empresa actúan como agentes que toman sus decisiones independientemente de los precios de mercado asociados a los insumos de producción y del bien representativo de consumo/producción.

Por otra parte, suponemos que el hogar es el propietario de los factores de producción, y su ingreso por la renta de dichos insumos a la empresa, estará dado por:

$$Y_H = w_K K_H + w_L L_H \tag{2}$$

Donde w_K y w_L denotan los precios del capital físico K_H y del trabajo L_H rentados por el hogar. Tomemos ahora las dimensiones de cada término de la ecuación (2) y analicemos su congruencia dimensional. El ingreso se expresa en términos de unidades monetarias recibidas en un intervalo de tiempo, por ejemplo, dólares/mensuales. En consecuencia, el ingreso es una observable económica de tipo flujo, y sus dimensiones se expresan como:

$$[Y_H] = \frac{M}{T}$$

10 Al igual que en el caso del hogar y la empresa, representativos, este bien se puede considerar como el agregado de todos los demás bienes del sistema.

El capital físico representa la cantidad de bienes que existen en un instante de tiempo, es decir es una observable de tipo s*tock*. El trabajo, a diferencia del capital físico, representa una observable de tipo flujo, ya que se mide en términos de unidades de trabajo utilizadas en un intervalo de tiempo. Los precios representan cuántas unidades monetarias equivalen a una unidad de capital físico o a una unidad de trabajo. Resumiendo:

$$[K_H] = Q_K, \qquad [L_H] = \frac{Q_L}{T}, \qquad [w_K] = \frac{M}{Q_K}, \qquad [w_L] = \frac{M}{Q_L}$$

Reescribamos la ecuación (2) en términos de las dimensiones de cada variable:

$$[Y_H] = [w_K K_H + w_L L_H]$$

$$\frac{M}{T} = \left(\frac{M}{Q_K}\right)(Q_K) + \left(\frac{M}{Q_L}\right)\left(\frac{Q_L}{T}\right)$$

Por lo tanto, las dimensiones asociadas a la ecuación (2) son:

$$\left(\frac{M}{T}\right) \neq (M) + \left(\frac{M}{T}\right) \tag{3}$$

Y esto muestra el primer resultado importante que resulta del análisis dimensional de la ecuación (2): la relación que describe el ingreso del hogar no es dimensionalmente congruente, ya que no se cumple que en ambos lados de la igualdad se encuentren las mismas dimensiones. ¿De dónde proviene este fallo?

La incongruencia dimensional se genera por la distinta naturaleza dimensional del capital. En la ecuación (2) se asume que ambos factores, capital y trabajo, pueden sumarse entre sí, simplemente porque ambos factores se ven convertidos a unidades monetarias por medio de la multiplicación con sus precios, sin embargo, ambos factores tienen una naturaleza distinta, ya que uno describe un *stock*, mientras que el otro factor describe a un flujo.

Revisemos ahora qué pasa en el caso de la empresa. Teóricamente se considera que la empresa actúa conforme a la maximización de su beneficio. Asimismo, se supone que el proceso productivo depende solamente de los insumos de producción (capital y trabajo) y que dicho proceso puede ser descrito mediante una función de producción *F (K_F; L_F)*. Es decir:

$$Y_F = w_K F(K_F;\, L_F) \tag{4}$$

Por lo tanto, el beneficio de la empresa estará dado por:

$$\pi = w_K F(K_F;\, L_F) - w_K K_H + w_L L_H \tag{5}$$

Donde π denota el beneficio de la empresa reportado en unidades monetarias obtenidas en un intervalo de tiempo, Y_F denota la producción realizada por la empresa expresada de igual forma en unidades monetarias por periodo de tiempo, w_K *y* w_L son los precios del capital físico y del trabajo, y K_F, L_F representan la cantidad de capital físico utilizado por la empresa y la cantidad de unidades de trabajo utilizadas en un intervalo de tiempo.

Al igual que antes, reescribimos la ecuación (5) en términos de las dimensiones de cada término:

$$[\pi] = [Y_F] = \frac{M}{T}, \qquad [F(K_F, L_F)] = \frac{Q_K}{T}, \quad [K_F] = Q_K, \quad [L_F] = \frac{Q_L}{T}$$

$$[w_K] = \frac{M}{Q_K}, \qquad [w_L] = \frac{M}{Q_L}$$

En consecuencia:

$$[\pi] = [w_K F(K_F;\, L_F) - (w_K K_F + w_L L_F)]$$

$$\left(\frac{M}{T}\right) = \left(\frac{M}{Q_K}\right)\left(\frac{Q_K}{T}\right) - \left(\frac{M}{Q_K}\right)(Q_K) + \left(\frac{M}{Q_L}\right)\left(\frac{Q_L}{T}\right)$$

Y nuevamente se obtiene una inconsistencia en las dimensiones de la expresión (5):

$$\left(\frac{M}{T}\right) \neq \left(\frac{M}{T}\right) - (M) + \left(\frac{M}{T}\right) \tag{6}$$

Al igual que la inconsistencia de la ecuación (2), ésta proviene del hecho de que estamos comparando (sumando) dos términos de distinta naturaleza, una cantidad de tipo *stock* (capital físico) es comparada con una cantidad de tipo flujo (trabajo). ¿Cómo corregir esta inconsistencia dimensional? Hay dos alternativas de solución. La primera es considerar la adición de algún término que tenga las dimensiones de T^{-1}, para que el término $w_K K$ adquiera las dimensiones correctas. Sin embargo, la introducción de una constante dimensional es una solución *ad hoc*, principalmente sino hay alguna justificación de su origen.

La segunda opción es considerar una interpretación distinta del término K. No pensamos que es la cantidad de capital físico la que afecta al ingreso y al beneficio; más bien, asumimos que la cantidad de capital físico utilizada en un intervalo de tiempo es la variable relevante.

Hay que tener en cuenta que el capital físico puede incorporarse o salir del mercado de los insumos productivos comportándose como un flujo. Es decir, se incorpora a ese mercado el nuevo capital o el ya existente cuando éste se encuentra temporalmente ocioso. Sale del mercado al ser destruido, al dejar de funcionar por avería, al ser obsoleto o cuando una determinada empresa cierra por sucumbir a la competencia. Bajo esas consideraciones se justifica el considerar al capital físico como una variable de tipo flujo y no como una variable de tipo *stock*.

En consecuencia, la nueva interpretación del término capital físico, la cual denominaremos como $\mathbb{K}$, es totalmente distinta a la de K, ya que la primera representa un término con la naturaleza de un flujo, el cual podrá verse como la cantidad de capital físico utilizado en un intervalo de tiempo[11]. Esta interpretación no debe parecer extraña, sobre todo si consideramos que el otro factor de producción, L, es un término tipo flujo.

11 Esta definición va a proporcionar el eje de las modificaciones al modelo Solow-Swan que se realiza en el presente trabajo de investigación.

En consecuencia, denominemos a este nuevo término, $\mathbb{K}$, como capital efectivo, el cual tiene asociado las dimensiones de un flujo de capital físico:

$$[\mathbb{K}] = \frac{Q_K}{T} \tag{7}$$

La introducción de esta nueva interpretación del término *K* resuelve la inconsistencia dimensional de las ecuaciones (2) y (5), las cuales reescritas con la incorporación de $\mathbb{K}$ resultan así:

$$Y_H = w_K \mathbb{K}_H + w_L L_H \tag{8}$$

$$\pi = w_K F(\mathbb{K}_F;\ L_F) - (w_K \mathbb{K}_H + w_L L_H) \tag{9}$$

Se ha propuesto una modificación a la interpretación de las variables involucradas en las ecuaciones (2) y (5). Sin embargo, este cambio se aplicó con poca argumentación en la función de producción. Ahora corresponde argumentar suficientemente porqué la función de producción también debe incluir solamente variables de tipo flujo de *stock* (la derivada respecto al tiempo de una variable de tipo *stock*).

Para comenzar, supongamos que no realizamos ninguna modificación a la función de producción, es decir, esta función sigue dependiendo de una combinación de variables de tipo *stock* (la cantidad de *stock* de capital físico) y de tipo flujo (cantidad de unidades de trabajo empleadas en un intervalo de tiempo). Por lo tanto, la expresión de los beneficios (9) sólo cambiará en la parte de los costos:

$$\pi = w_K F(K, L) - (w_K \mathbb{K} + w_L L) \tag{10}$$

Donde hemos empleado las definiciones de $\mathbb{K} = \dot{K}$ y de $L = \dot{P}$. Así, al maximizar la ecuación (10) obtendríamos:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbb{K}} = 0 = w_K; \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w_L}{w_K}; \qquad \frac{\partial F}{\partial K} = 0 \tag{11}$$

Lo cual conduce a una contradicción ya que los precios de los factores de producción siempre se consideran diferentes de cero. Por lo tanto, la modificación que realizamos anteriormente a la función de producción (cuando se introdujo el capital efectivo $\mathbb{K}$), es una condición necesaria para preservar el resultado de la igualdad entre las productividades marginales y los precios de los factores de producción.

Con esa modificación, el problema de la incongruencia dimensional de la función de producción parecía quedar resuelto, ya que en nuestra propuesta las dimensiones asociadas a la función de producción son las de una observable de tipo de flujo, más específicamente de flujo de *stock* de capital físico:

$$[F(\mathbb{K}, L)] = \frac{Q_K}{T}$$

Sin embargo, ¿qué pasa cuando se especifica de forma exacta la estructura de la función de producción $F(\mathbb{K}, L)$? Por ejemplo, consideremos la forma canónica de las funciones Cobb-Douglas[12]:

$$F(K_i) = \prod_{i}^{n} K_i^{\alpha_i} \tag{12}$$

Donde K_i son los factores de producción, y los exponentes α_i son números adimensionales que representan las elasticidades de sustitución de los factores de producción, las cuales deben cumplir la condición:

$$\sum_{i}^{n} \alpha_i = 1 \tag{13}$$

Para analizar las dimensiones típicas de una función Cobb-Douglas consideremos en primera instancia una función de Cobb-Douglas dependiente de sólo dos factores, el capital efectivo ($\mathbb{K}$) y el trabajo (L).

$$F(\mathbb{K}, L) = A\mathbb{K}^{\alpha} L^{1-\alpha} \tag{14}$$

12 Las funciones tipo Cobb-Douglas cumplen los supuestos neoclásicos de la función de producción (rendimientos decrecientes y constantes a escala). Asimismo, satisfacen las condiciones de Inada y muestran factores de participación constantes (α). Por estas razones, las funciones tipo Cobb-Douglas son ampliamente utilizadas en los modelos de crecimiento económico.

Siendo A una constante positiva que usualmente se adiciona con el propósito de introducir el efecto que tiene la tecnología sobre la producción. Tomemos las dimensiones de la función de Cobb-Douglas expresada en (14):

$$[F(\mathbb{K}, L)] = \frac{Q_K}{T}$$

$$[A\mathbb{K}^{\alpha}L^{1-\alpha}] = [A][\mathbb{K}]^{\alpha}[L]^{1-\alpha} = [A]\left(\frac{Q_K}{T}\right)^{\alpha}\left(\frac{Q_P}{T}\right)^{1-\alpha}$$

Por lo tanto, para la función de Cobb-Douglas de dos factores (14), obtenemos una inconsistencia en las dimensiones:

$$\left(\frac{Q_K}{T}\right) \neq [A]\left(\frac{Q_K}{T}\right)^{\alpha}\left(\frac{Q_P}{T}\right)^{1-\alpha} \tag{15}$$

Se debe señalar que no hemos especificado las unidades de la constante A, ya que no es claro cómo deberían ser las dimensiones de una constante que pretende representar el efecto de la tecnología sobre la producción. De hecho, en ninguna parte de la literatura sobre crecimiento económico se especifica en qué unidades, y por ende en qué dimensiones, se mide A. Usualmente se considera a A sólo como una constante o variable adimensional que simplemente aumenta el nivel de producción; sin embargo, si aceptamos que la constante es adimensional, es decir ($[A] = 1$), la incongruencia dimensional de la función Cobb-Douglas no se resuelve.

Por lo tanto, ¿qué dimensiones debería tener la constante A, considerando que los factores capital efectivo y trabajo tienen asociados, respectivamente, las dimensiones $\frac{Q_K}{T}$ y $\frac{Q_P}{T}$ y éstas se ven afectadas por el coeficiente de elasticidad α?

Analizando las dimensiones de la función de producción, es claro que las dimensiones de A dependerán, de manera explícita, del valor que adopte el parámetro α e involucrarán una combinación de dimensiones. La obtención de las dimensiones de A es directa, después de unos pasos de algebra:

$$[A] = \left(\frac{Q_K}{Q_P}\right)^{1-\alpha} \tag{16}$$

Esta constante dimensional homogeneiza toda la función de producción, dando como resultado global que las dimensiones sean de unidades de capital físico por unidad de tiempo $\frac{Q_K}{T}$. La generalización de la constante dimensional A se puede obtener para el caso de una función de producción Cobb-Douglas que dependa de n factores de producción[13]. Por ejemplo:

$$[F(K_i)] = [A]\left[\prod_i^n K_i^{\alpha_i}\right]$$

Supongamos que cada factor K_i tiene asociada una dimensión $\frac{Q_i}{T}$. En consecuencia, calculando las dimensiones de la función multifactorial obtendríamos:

$$\frac{Q_K}{T} = [A]\prod_i^n \left(\frac{Q_i}{T}\right)^{\alpha_i}$$

Por lo tanto, para que la igualdad anterior se cumpla, el factor A debe tener asociadas las siguientes dimensiones:

$$[A] = \left(\frac{Q_K}{T}\right)\prod_i^n \left(\frac{T}{Q_i}\right)^{\alpha_i} \tag{17}$$

Finalmente, se puede observar que de la forma canónica dimensional de la constante A, (la expresión (17)), se puede recuperar en el caso de la función de producción dependiente de sólo dos factores.

13 La justificación de cómo se pueden incorporar constantes que proporcionen coherencia dimensional a las funciones de producción todavía es un tema en proceso de investigación

2. El Análisis Dimensional del Modelo Solow-Swan de Crecimiento.

El modelo de Solow-Swan es uno de los iconos de la metodología económica moderna sobre crecimiento económico, el cual fue presentado simultáneamente en dos artículos publicados en 1956. Posteriormente, Solow y otros economistas han desarrollado y ampliado el modelo con el fin de proporcionar un marco analítico sencillo que permita modelar los factores que intervienen en la mecánica del crecimiento económico.

El núcleo del modelo de Solow-Swan es la ecuación diferencial propuesta por ambos autores, la cual modela la dinámica de la acumulación de capital físico en base a dos factores: la producción y el trabajo. Dicha ecuación diferencial es la siguiente[14]:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \tag{18}$$

Donde las variables $K(t)$,$Y(t)$ representan, en la interpretación original del modelo (Solow, 1956; Swan 1956), el *stock* de capital físico y la producción respectivamente, $\dot{K}(\mathrm{t})$ representa la variación del *stock* de capital físico (es decir, la primera derivada respecto del tiempo de la función del capital físico) y los términos s,δ son parámetros que representan la propensión al ahorro y la tasa de depreciación. La ecuación (18) propone que la variación del capital físico depende de dos factores: uno es la porción de la producción asignada a la acumulación de capital ($sY(t)$) y el otro factor es la depreciación del capital físico ($\delta K(t)$).

El modelo asume que la producción $Y(t)$ puede ser descrita en primera instancia por una función de producción que depende de solo dos factores, del nivel de *stock* de capital físico y del flujo de unidades laborales (trabajo).

$$Y(t) = F(K, L) \tag{19}$$

Asimismo, como la función de producción cumple las propiedades clásicas de rendimientos decrecientes y constantes a escala, es posible ex-

14 Esta ecuación también puede expresarse como una ecuación en diferencias. La elección de una u otra formulación matemática no afecta los resultados que se obtendrán.

presarla en términos de una sola variable, la cual se define como el *stock* de capital físico por unidad de población:

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)} \tag{20}$$

Por lo tanto, reescribiendo la ecuación (18) en términos de la función de producción (19) y de la nueva variable (20) se obtiene la llamada ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan:

$$\dot{k}(t) = sk(t) - (\delta + n)k(t) \tag{21}$$

Donde *n* representa la tasa de crecimiento de la población. La ecuación (21) no se puede resolver de forma explícita si no se especifica antes la función de producción. Siguiendo la costumbre de los libros de texto (Acemoglu, 2009), se propone la función de producción Cobb-Douglas:

$$F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \tag{22}$$

De esta manera, al especificar la función de producción, la ecuación diferencial original se transforma en:

$$\dot{k}(t) = sk^{\alpha} - (\delta + n)k(t) \tag{23}$$

Ahora, iniciamos el análisis dimensional del modelo. En primera instancia revisemos la homogeneidad dimensional de la primera ecuación diferencial del modelo de Solow-Swan (18). Reescribimos la ecuación en función de las dimensiones de cada término:

$$[\dot{K}] = \left[\frac{d}{dt}\right][K] = \left(\frac{1}{T}\right)(Q_K) = \frac{Q_K}{T}$$

$$[sY(t)] = [s][Y(t)] = (1)\left(\frac{M}{T}\right) = \frac{M}{T}$$

$$[(\delta)K(t)] = [\delta][K(t)] = \left(\frac{1}{T}\right)(Q_K) = \frac{Q_K}{T}$$

Así, la ecuación (18) expresada en términos de las dimensiones de sus variables quedaría:

$$\left(\frac{Q_K}{T}\right) \neq \left(\frac{M}{T}\right) + \left(\frac{Q_K}{T}\right) \tag{24}$$

Lo cual muestra que hay una inconsistencia en la primera relación del modelo de Solow-Swan. Ahora, calculemos las dimensiones de la ecuación fundamental de Solow-Swan (21):

$$\left[\dot{k}(t)\right] = \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{Q_K}{Q_P}\right) = \frac{Q_K}{Q_P T}$$

$$[sk(t) - (\delta + n)k(t)] = (1)\left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right) - \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{Q_K}{Q_P}\right) = \left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right) - \left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right)$$

El cálculo muestra que para este caso no hay ninguna inconsistencia dimensional, ya que:

$$\frac{Q_K}{Q_P T} = \left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right) - \left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right) \tag{25}$$

Sin embargo, la ecuación (21) deja de ser consistente una vez que se introduce la función de Cobb-Douglas, es decir la ecuación (23):

$$[sk^\alpha - (\delta + n)k(t)] = (1)\left(\frac{Q_K}{Q_P}\right)^\alpha - \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{Q_K}{Q_P}\right) = \left(\frac{Q_K}{Q_P}\right)^\alpha - \left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right)$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{Q_K}{Q_P}\right) \neq \left(\frac{Q_K}{Q_P}\right)^\alpha - \left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right) \tag{26}$$

La primera inconsistencia, ecuación (24), no es, hasta cierto punto, grave, ya que se corrige simplemente con la incorporación del inverso del precio de la producción:

$$\dot{K}(t) = \frac{s}{w_K} Y(t) - \delta K(t) \tag{27}$$

La incorporación del precio de la producción se omite en muchas de las exposiciones que se hacen sobre el modelo, en otras se menciona su introducción, pero justifican la desaparición del término precio al considerar que dicha variable puede ser normalizada a la unidad (Acemoglu, 2009); sin embargo, si no se especifica explícitamente la incorporación del precio se obtiene una ecuación incongruente desde el punto de vista dimensional. Asimismo, si se sustituye la siguiente ecuación (28), propuesta en la sección anterior:

$$Y(t) = w_K F(\mathbb{K}, L) \tag{28}$$

en la ecuación corregida (27), obtenemos la ecuación equivalente a la ecuación original del modelo (18), con la única diferencia que la nueva ecuación es dimensionalmente congruente, y considera la corrección a la función de producción, de tal forma que ahora la ecuación diferencial involucra tres factores distintos, K, L y $\mathbb{K}$.

$$\dot{K}(t) = sF(\mathbb{K}, L) - \delta K(t) \tag{29}$$

La anterior diferencia entre las ecuaciones (18) y (29) es el origen de la incongruencia dimensional que surge cuando se incorpora la función de Cobb-Douglas a la ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan (23).

Prosiguiendo con la corrección dimensional, notamos que cuando se incorpora la función de producción *equidimensional* $F(\mathbb{K}, L)$ y, además, se transforman las variables originales de dicha función a variables tipo per cápita, la función no se transforma en una función univariable; a diferencia de la función de producción sin la corrección dimensional, la cual sí se transforma en una función de una sola variable. Por lo tanto, considérese nuevamente la función de producción propuesta, que tiene como variables al capital efectivo $\mathbb{K}$ y al trabajo L, las cuales se relacionan con los stocks de capital físico (K) y de población (P) a través de la siguiente forma:

$$\mathbb{K}(t) = \dot{K}(t), \qquad L(t) = \dot{P}(t) \tag{30}$$

Por lo tanto, la función de producción es equivalente a:

$$F\big(\mathbb{K}(t), L(t)\big) = F\left(\dot{K}(t), \dot{P}(t)\right) \tag{31}$$

La función (31) sigue preservando su naturaleza de función homogénea de grado uno, en $\dot{K}$ y $\dot{P}$, y su carácter de convexidad negativa, pero no respecto a las variables de *stock* de capital físico y población, en su lugar las variables son las razones de cambio de dichos stocks, es decir las variables flujo $\mathbb{K}$ y L. Calculemos la función (31) en términos de producción per cápita:

$$\frac{1}{P(t)}F\big(\mathbb{K}(t),L(t)\big)=F\left(\frac{\dot{K}(t)}{P(t)},\frac{\dot{P}(t)}{P(t)}\right) \tag{32}$$

Utilizando el supuesto de que el *stock* de población crece a una tasa constante *n*:

$$\frac{\dot{P}(t)}{P(t)}=n \tag{33}$$

Y la definición de capital físico per cápita (20) se obtiene la expresión para el capital efectivo per cápita:

$$\frac{\mathbb{K}}{P}=\frac{\dot{K}(t)}{P(t)}=\left(\frac{\dot{P}(t)}{P(t)}\right)k(t)+\left(\frac{P(t)}{P(t)}\right)\dot{k}(t)=nk(t)+\dot{k}(t) \tag{34}$$

Por lo tanto, con la corrección propuesta, se obtiene una nueva función de producción expresada sólo en términos del capital per cápita (20); sin embargo, se ha obtenido una expresión más complicada ya que la función de producción ahora va a depender de la tasa de crecimiento de la población y de la combinación del *stock* y del flujo de *stock* del capital físico.

$$\frac{1}{P(t)}F\big(\mathbb{K}(t),L(t)\big)=f\big(nk(t)+\dot{k}(t),n\big) \tag{35}$$

Veamos un caso concreto. Consideremos la función de Cobb-Douglas (14) descrita en la sección anterior y obtengamos su expresión en términos del capital físico per cápita:

$$\left(\frac{1}{P}\right)F\big(\mathbb{K}(t),L(t)\big)=A\left(\frac{1}{P}\right)\mathbb{K}^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{36}$$

Nuevamente, considerando la relación entre los flujos de *stock* $\mathbb{K}$ y L con sus respectivos stocks, K y P, y tomando en cuenta la ecuación (33) se obtiene:

$$f\big(nk(t) + \dot{k}(t), n\big) = An\left(\frac{\dot{K}}{\dot{P}}\right)^{\alpha} \tag{37}$$

Utilizando la definición del capital físico per cápita (20) se puede demostrar que:

$$\dot{K} = \dot{P}k + \dot{k}P \tag{38}$$

En consecuencia, la función de producción per cápita de tipo Cobb-Douglas, con la nueva incorporación de las variables flujo es:

$$f\big(nk(t) + \dot{k}(t), n\big) = An\left(k(t) + \frac{\dot{k}(t)}{n}\right)^{\alpha} \tag{39}$$

Y efectivamente, la función de producción per cápita depende de la tasa de crecimiento de la población n y también de una combinación del *stock* y del flujo de *stock* del capital físico per cápita. El cálculo de las dimensiones de la nueva función de producción (39) no muestra ningún tipo de inconsistencia dimensional, como veremos a continuación:

$$\begin{gathered}\big[f\big(nk(t) + \dot{k}(t), n\big)\big] = [A][n]\left[k(t) + \frac{\dot{k}(t)}{n}\right]^{\alpha} \\ \frac{Q_K}{Q_P T} = \left(\frac{Q_K}{Q_P}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{Q_K}{Q_P} + \frac{Q_K T}{Q_P T}\right)^{\alpha}\end{gathered} \tag{40}$$

Por lo tanto, introducimos ahora la función de producción per cápita (39) en la ecuación fundamental de Solow-Swan (21):

$$\dot{k}(t) = sAn\left(k(t) + \frac{\dot{k}(t)}{n}\right)^{\alpha} - (\delta + n)k(t) \tag{41}$$

Verificamos la congruencia dimensional de la ecuación corregida del modelo de Solow-Swan:

$$\left[\dot{k}(t)\right] = \frac{Q_K}{Q_P T}$$

$$\left[sAn\left(k(t) + \frac{\dot{k}(t)}{n}\right)^{\alpha} - (\delta + n)k(t)\right] = (1)\left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right) - \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{Q_K}{Q_P}\right) \tag{42}$$

$$\left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right) = (1)\left(\frac{Q_K}{Q_P T}\right) - \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{Q_K}{Q_P}\right)$$

Y tal como era de esperarse, no surge ninguna inconsistencia dimensional, ya que hemos introducido una función de producción adecuadamente construida, que toma en consideración las dimensiones de las variables involucradas. Sin embargo, la homogenización de la función de producción ha tenido un costo en cuestión de simplicidad, ya que ahora es una función que combina el *stock* de capital per cápita y su razón de cambio, a diferencia de las funciones originales las cuales pueden expresarse sólo como función del *stock* del capital físico per cápita.

3. Conclusiones

La teoría económica convencional se ha esforzado por tener el mismo nivel de éxito, en la comprensión y predicción de los fenómenos económicos, que el alcanzado por la ciencia en la comprensión y predicción de los fenómenos naturales. Por esa razón, la teoría económica ha emulado los métodos analíticos, estadísticos y matemáticos de las ciencias naturales, acotándose a sí misma, en un alto grado, a la formulación de modelos matemáticos para explicar la realidad económica. Es decir, esta teoría tiende a convertirse en un ejercicio de modelación matemática más que en una verdadera disciplina científica de observación. De esta manera, aunque los economistas reclaman que la economía es una ciencia objetiva y sólida al igual que las ciencias naturales, actualmente la economía está construida sobre teorías, supuestos y modelos matemáticos, que son endebles y sumamente cuestionables desde el punto de vista analítico, tal y como lo ha mostrado esta investigación.

Al hacer hincapié en la adoración de la técnica y la elegancia formal de la matemática, la teoría económica se ha convertido en una suerte de matemáticas sociales que emplea términos económicos. Esta tendencia de la economía hacia el formalismo ha tenido consecuencias. Se ha sobrevalorado la formalidad y la elegancia matemática en detrimento del contenido, la consistencia y el argumento. Se atiende más a la forma en que una teoría económica o hipótesis es presentada, y se descuida su contenido (Blaug, 1998). Además, los resultados de dicho programa de formalización matemática han sido, en el mejor de los casos, insuficientes o inadecuados. Comúnmente se cree que cuando se diseña o utiliza un modelo económico-matemático se hace economía, pero se olvida que la mayoría de las relaciones propuestas en un modelo son relaciones de naturaleza matemática, aunque con un contenido o significado económico. Todas las inferencias son obtenidas matemáticamente; y se da poca atención a si esas variables, conceptos y relaciones funcionales tienen alguna semejanza o correlación con la observación del mundo económico. Al no atender ese hecho fundamental, los economistas han fallado en emular los métodos de las ciencias naturales en un aspecto crucial: considerar el uso correcto de las dimensiones.

En la presente investigación hemos demostrado cómo el análisis dimensional ha sido omitido en numerosas relaciones económicas de la teoría convencional, y del modelo analizado, lo cual lleva a una conclusión definitiva, y que creemos es necesario señalar para juzgar apropiadamente el actual papel de la modelación económica: ciertas partes de la teoría económica adolecen de fallas analíticas importantes, y estas fallas son transmitidas a los modelos que se sustentan en dicha teoría, siendo uno de ellos el modelo de Solow-Swan.

En el proceso de corrección de la inconsistencia dimensional del modelo de Solow-Swan obtuvimos una nueva ecuación diferencial del modelo (41) que carece de las inconsistencias dimensionales de la ecuación original; sin embargo, ha pagado un precio significativo en cuanto a simplicidad, ya que ahora la ecuación dinámica se ha vuelto más complicada debido a la incorporación del término $\dot{k}$ dentro de la función de producción. Asimismo, la incorporación de dicho término impide resolver la ecuación de forma analítica, ello implica que el análisis dinámico del modelo sólo pueda ser realizado mediante simulación numérica. De igual forma, un análisis estático del modelo *equidimensional* está fuera de toda cuestión debido a la no linealidad de la ecuación dinámica.

No obstante, la dinámica que presenta la nueva ecuación *equidimensional* del modelo de Solow-Swan pudiera ser más rica y compleja en relación al comportamiento de la acumulación del capital físico per cápita, ya que ahora, esta acumulación dependerá directamente del valor del coeficiente de distribución α y de la tasa de crecimiento de la población n, además de la introducción del mismo término de acumulación $\dot{k}$, el cual provoca una fuerte no linealidad en la dinámica del modelo. Es importante mencionar que un análisis exhaustivo de la nueva ecuación queda fuera de las posibilidades de este artículo, será materia de una investigación futura.

Por lo tanto, el conflicto de un modelo económico que viola el principio de homogeneidad dimensional, aunque intuitivamente ha sido atractivo por su simplicidad para toda una corriente de pensamiento, va contra alternativas de modelación que podrían ser dimensionalmente correctas, como la propuesta en este trabajo, y carece de la simplicidad analítica de los modelos previos. Esto es difícil de resolver dado que existe un amplio espectro de modelos económicos con diferentes estructuras y supuestos. Pudiera ser que los modelos se adapten sin mayor complicación al principio de homogeneidad dimensional, y por ende sus interpretaciones y predicciones no cambien de forma sustancial. Pero, creemos que es igual de probable que exista un buen número de modelos económicos que no resistan la aplicación del principio de homogeneidad dimensional, lo cual conllevaría a poner en cuestionamiento la factibilidad teórica y analítica de sus supuestos y predicciones.

Por último, nos permitimos indicar al lector la dirección que seguirá nuestra investigación. Consideramos que es necesario analizar a profundidad los fundamentos microeconómicos de la teoría económica convencional, con el fin de identificar posibles errores analíticos de modelación. Haremos uso del análisis dimensional en otros campos de la teoría económica, con el propósito de señalar si la omisión del análisis dimensional es algo aislado u ocurre de forma sistemática en la teoría. Intentaremos fundamentar con mayor rigor los principios del análisis dimensional, enfocados al campo de la economía, ya que, sobre este punto, aún quedan varias cuestiones teóricas por responder. Asimismo, investigaremos cuáles son las consecuencias de formular un modelo económico dimensionalmente correcto, como el que se ha propuesto en este artículo, y cuáles son las diferencias entre las predicciones de este modelo y del modelo original.

Bibliografía

Acemoglu, Daron, *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, New York, USA, 2009.

Balaguer, Pedro, *Application of Dimensional Analysis in Systems Modeling and Control Design, Control Engineering Series*, The Institution of Engineering and Technology, London, UK, 2013.

Barnett II, William, "Dimensions and Economics: Some Problems", *The Quarterly Journal of Austrian Economics*, vol. 7, 2004, pp. 95-104.

Blaug, Mark, "The problems with formalism, interview with Mark Blaug", *Challenge*, no. 3, vol. 41, 1998, pp. 35-45.

Bunge, Mario & et al., *Problems in the Foundations of Physics: A Mathematical Theory of Dimensions and Units of Physical Quantities*, Springer-Verlag, Canada, 1971.

Carlson, Donald E., "A Mathematical Theory of Physical Units, Dimensions and Measures", *Rational Mechanics and Analysis*, vol. 70, 1979, pp. 289-304.

De Jong, Frits J. & Kumar, T. Krishna, "Some Considerations on a Class of Macro-Economic Production Functions", *De Economist*, 120, 1972, pp. 134-152.

Grudzewski, Wieslaw M., & Roslanowska, Krystyna, *Application of Dimensional Analysis in Economics*, IOS Press, Netherlands, 2013.

Macagno, Enzo O., "Historical-critical Review of Dimensional Analysis", *J Franklin Institute*, 292, 1971, pp. 391-402.

Shone, Ronald, *Economic Dynamics*, Cambridge University Press, USA, 2002.

Solow, Robert M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, no. 1, vol. 70, 1956, pp. 65-94.

Sonin, Ain A., *The Physical Basis of Dimensional Analysis*, Department of Mechanical Engineering MIT, Cambridge, USA, 2001.

Swan, Trevor W., "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic Record*, issue 2, vol. 32, 1956, pp. 334-361.

White, Frank M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill series in mechanical engineering, USA, 2011.