GESTIÓN FINANCIERA BASADA EN LA VALUACIÓN DEL RIESGO

Guillermo Martínez Atilano[1] y
Regina Leal Güemez[2]

Resumen

Los modelos cuantitativos del valor en riesgo (VaR) y el modelo del precio de los activos derivados (Blach-Scholes) han dotado a la gestión financiera de indicadores confiables para la administración de riesgos. En este artículo se evalúan los diferentes alcances de estos modelos y se reportan resultados de su aplicación al mercado de divisas.

Introducción

La moderna gestión financiera no hubiera sido posible sin la modelación matemática y estadística. En efecto, los modelos cuantitativos, seguidamente complejos, han guiado la innovación en finanzas y el acelerado crecimiento de los mercados financieros. ¿Cuál es la noción que marca la diferencia entre la gestión financiera tradicional y la moderna? Esta noción o línea divisoria no es otra más que el riesgo[3]. Considerar la incertidumbre dentro de la toma de decisiones puede ocurrir en los modelos de equilibrio gene-

---

[1] Profesor Investigador Titular "C". Área de Modelación de Sistemas en la Economía y la Administración. Departamento de Economía. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

[2] Profesora Investigadora Titular "C". Área de Modelación de Sistemas en la Economía y la Administración. Departamento de Economía. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

[3] Así como la teoría moderna del crecimiento económico incluye la noción de capital humano (el conocimiento y el aprendizaje) por oposición al capital físico, para distinguirse de las teorías tradicionales del crecimiento.

ral a la Arrow[4], donde se especifican distintos estados de la naturaleza asociados con posibles situaciones de riesgo. Sin embargo, la noción del riesgo imprime una dificultad mayor a la toma de decisiones; dificultad que genera la búsqueda de información y de posiciones que minimicen los costos de eventos adversos, no previstos. En 1959 Harry Markowtiz, premio Nobel de economía, publicó el artículo "Selección de Portafolios"[5] mismo que significó el inicio de la moderna teoría de inversiones. El artículo proponía que al seleccionar activos de capital, el inversionista debería considerar tanto el rendimiento esperado como la variabilidad del rendimiento del activo, para conformar carteras de inversión eficientes en el sentido de minimizar el riesgo. Es importante señalar que el procedimiento de Markowitz no es sólo un método para la formación de carteras eficientes, sino un cuerpo de ideas y proposiciones acerca de la forma en que los inversionistas utilizan el promedio y la varianza para enfrentar situaciones de riesgo. Por su parte, James Tobin[6] señala que el riesgo obliga a la diversificación de las carteras con el fin de distribuirlo entre los distintos activos, pero que tal diversificación depende en gran medida de la actitud particular del inversionista en cuanto al riesgo que básicamente es de rechazo o aversión, por lo que la correlación entre riesgo y rendimiento es positiva.

Los modelos de la gestión financiera para medir el riesgo pueden ser divididos en dos categorías. Los modelos que utilizan la varianza o riesgo constante y los de varianza cambiante. Los modelos de Valor en Riesgo y los modelos de equilibrio de mercado, pertenecen a la primera categoría, mientras que el modelo Black-Scholes para opciones a la segunda. En ambas categorías, el fin es estimar el valor de una inversión o de una cartera de activos. La correduría *J.P. Morgan* desarrolló el modelo de Valor en Riesgo, (VaR), medida que pretende estimar la perdida potencial en una cartera de inversión ante cambios en los precios, tasas e índices que incidan de forma negativa en el valor de las posiciones. Este modelo define el máximo de pérdida que puede tenerse en una cartera de inversión dada la probabilidad de ocurrencia de un evento desfavorable en un periodo de tiempo bajo

[4] Arrow, Keneth y Frank Hahn. *Equilibrio General Competitivo*, Fondo de Cultura Económica, México, 1979.

[5] Markowitz, H. *Porffolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons,Inc. Nueva York, 1959.

[6] Tobin, J. "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economics Studies*, 25 (Febrero de 1958), 65-86.

condiciones normales de mercado y dentro de un intervalo de confianza dado. El concepto VaR, o valoración del riesgo, proviene de la necesidad de cuantificar con determinado nivel de significancia o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período predefinido de tiempo. Su medición tiene un nivel estadístico de significancia del 5%. Esto significa que solamente el 5% de las veces, es decir que con datos diarios y considerando semanas laborales, una vez cada mes el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el VaR. Si consideramos una serie de rendimientos históricos de un portafolio que posee un número n de activos, es factible visualizar la distribución de densidad de aquellos rendimientos a través del análisis del histograma. Es común encontrar fluctuaciones de rendimientos en torno a un valor medio que no necesariamente es cero (este concepto en estadística se denomina proceso con reversión a la media) y cuya distribución se aproxima a una normal.

Para evaluar los modelos VaR, primero es necesario conocer las probabilidades de distribución de los precios de los bienes subyacentes. Después, se deben utilizar estos precios en el valor total del portafolio. Si se establece un 5% como área de pérdida, debemos multiplicar a la desviación estándar de la serie de rendimientos por 1.645. Es decir, si el retorno esperado para un portafolio es de 4% y la desviación estándar es de 2%, entonces el VaR indicará que este portafolio podría sufrir una pérdida superior a 1.645*2=3.29% en sus rendimientos esperados, pasando de 4% a 0.71% o menos, solamente el 5% de las veces.

El *Capital Asset Price Model* (CAPM) es similar al modelo de Valor en Riesgo y pertenece a esta misma categoría, al igual que el VaR parte de la estimación del riesgo de mercado para luego estimar la exposición al riesgo de activos particulares; la combinación de activos riesgosos con aquellos de menor riesgo permiten diversificar la tenencia de activos y, por consiguiente, reducir el riesgo total. [7] El CAPM utiliza el análisis de regresión lineal para identificar el coeficiente beta de una regresión como el beta del mercado, en un modelo de activos de capital[8]. Asimismo, existen modelos que cuantifican el efecto de las tasas de interés en el pago de una hipoteca y las

[7] Martínez, Atilano, y R. Leal. "Modelos de demanda de activos financieros", UAM- *Serie de Investigación No. 18,* 1998. pag.159-184.

[8] Sharpe,W. *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, Nueva York, 1970.

variaciones en el consumo ocasionadas por cambios en los ingresos esperados[9].

La segunda categoría comprende los modelos de fijación del precio de los productos derivados. Los derivados son instrumentos cuyo valor depende del precio de un activo subyacente tal como las acciones, los bonos, las monedas o bienes como el petróleo. Un ejemplo de derivados es la opción *call* de una acción, la cual confiere al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar la acción en un tiempo futuro a un precio (*strike*) acordado en el momento actual. El precio de una opción puede ser fijado con el modelo desarrollado por Fischer Black y Myron Scholes (1973), el cual comprende cinco factores: el precio *strike*, el tiempo de expiración, el precio actual de la acción, su volatilidad, y la tasa de interés libre de riesgo. Con el modelo de Black-Scholes el precio de las opciones se fija correctamente, y esto ha dado inicio a una explosión de la actividad bursátil. De hecho, los nuevos modelos utilizados en los mercados secundarios son extensiones al modelo Black-Scholes. Es importante señalar que al igual que los modelos anteriores, el modelo Black-Scholes es diferente a un modelo estadístico[10]. Es una fórmula analítica – teóricamente deducida– que permite determinar exactamente el valor de una opción. En la práctica, los resultados de los modelos estadísticos sirven como insumo para los modelos de valuación. Por ejemplo, para fijar el valor de un *Warrant* de tipos de cambio, primero debe estimarse la volatilidad del tipo de cambio nominal.

Para una gestión eficaz del riesgo se debe tener presente que las estimaciones estadísticas están sujetas a errores y pueden llevar a errores al modelo de valuación del cual sirven como insumo. Se pueden cometer errores en el precio de vencimiento o en la tasa de interés libre de riesgo, aunque esto no sería tan grave pues el problema en sí surge en la estimación del precio del bien subyacente. Supongamos que un inversionista se planteó en enero de 1998 la tarea de realizar un pronóstico del tipo de cambio que prevalecería en los próximos meses. Además, consideró la necesidad de realizar este pronóstico con base en las tasas de cambio del tipo de cambio nominal. Adicionalmente y para asegurarse de que no sólo el nivel del tipo

[9] Martínez Atilano, G. y Regina Leal. "El modelo de ruta aleatoria de la función consumo", *Serie de Investigación*, No.11, 1993, pág. 9-25.

[10] Abreu Beristain, M. "Valuación del modelo Black and Scholes para derivados que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores", en *Serie de Investigación* No. 18,1997, pág. 185-204

de cambio se pronostica, evaluaría la volatilidad histórica en meses anteriores.

El rendimiento del tipo de cambio R_t se puede calcular con base en la ecuación 1, donde S_t es la cotización *spot* a 24 horas del tipo de cambio.

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} * 100 \qquad (1)$$

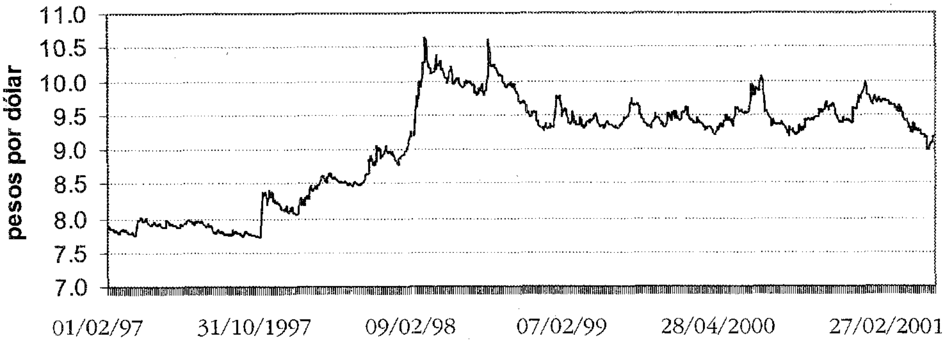
Mientras que σ es la volatilidad de los rendimientos diarios i μ es el valor promedio del rendimiento.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R_t - \mu)^2} \qquad (2)$$

La volatilidad estimada resulta ser 0.5919 y el pronóstico basado en la simple extrapolación era una devaluación no superior al 15%; esto quiere decir que de 8.0 pesos por dólar se pronosticaba llegar a 9.05 pesos. Sin embargo, los acontecimientos que siguieron llevaron al peso a una depreciación de 22.85 % al final del año, cuando el tipo de cambio se ubica en 9.9 pesos por dólar. Cualquier estimación basada en una depreciación de sólo el 15 % significó pérdidas para todos los que tenían una posición corta en dólares, como era el caso de los importadores. Y cualquier intercambio durante el último trimestre, periodo de mayor volatilidad, podría llevar incluso a la quiebra. Durante el último trimestre de 1998, se observó una mayor inestabilidad de la paridad cambiaria, por el nerviosismo generado en el mercado tanto por los ataques especulativos realizados contra la moneda brasileña durante octubre y noviembre, como por la importante reducción de los precios internacionales del petróleo a finales de noviembre. De esta forma, aunque el tipo de cambio *spot* a la venta llegó a alcanzar el 8 de octubre un nivel máximo intradía de 10.420 pesos por dólar, al cierre de 1998 registró una cotización de 9.908 pesos por dólar, lo que representó una apreciación de 2.86 por ciento en relación con la cotización registrada al cierre del tercer trimestre de 1998 y una depreciación de 22.85 por ciento con respecto a la del cierre de 1997, mientras que la mayor estabilidad alcanzada por el mercado cambiario hacia finales de 1998 repercutió en las cotizaciones de los contratos a futuro del peso mexicano en la Bolsa Mercantil de Chicago. De esta manera, los contratos a futuro del peso para entrega en diciembre de 1998 se apreciaron 8.31%. Asimismo, los contratos para entrega en marzo y junio de 1999 se apreciaron 10.72% y 10.69%, respectivamente, con relación a las cotizaciones registradas al cierre del tercer trimestre del año; pero en 1999, el precio durante el primer semestre se mantuvo cercano a los 9.30 pesos por dólar. Además, durante el año 2000, el peso se ha mantenido en los 9.20 pesos por dólar. Es decir, en lugar de depreciarse, ¡el peso se apreció! No se cumplieron los pronósticos de mayor devaluación.¿ Por qué las estimaciones del riesgo fueron inadecuadas en el caso del peso? Aun cuando se verificara que los datos y los cálculos hayan sido realizados correctamente, el problema tiene que ver con los supuestos que se hicieron al momento de elaborar los modelos. Suponer que los rendimientos se distribuyen normal e independientemente permite que el modelo sea computable pero no significa que la serie bajo estudio siga la distribución normal. Además, el supuesto de distribución normal permite inferir que la probabilidad de ocurrencia de un valor demasiado grande, como es una cotización del peso igual a 10.4, era muy poco probable; es decir, que resultaba más probable que el peso se moviera en el rango de los 8.5 y 9.5 pesos por dólar. Sin embargo, el hecho poco probable estadísticamente fue el que ocurrió. La serie y_t representa la tasa de apreciación del peso frente al dólar, donde los incrementos representan una depreciación y las caídas una apreciación. En la segunda parte de la gráfica 1, puede observarse que la inestabilidad cambiaria caracteriza el primer año de operación del régimen de tipos de cambio flexibles. Para 1996 y 1997, las fluctuaciones corresponden más con los ajustes permanentes ocasionados por factores reales de la economía (productividad, precios relativos) y transitorios (excesos de oferta ocasionados por ventas del Banco de México, especulación contra otras monedas).

Respecto al comportamiento estadístico de la serie y_t, los vaivenes en la cotización diaria caracterizan a la serie como no homoscedástica, no obstante la transformación logarítmica utilizada para estabilizar la varianza. En el cuadro 1 se resumen los principales estadísticos de la serie para el periodo completo y por años. Los datos históricos muestran que los episodios de volatilidad son de corto plazo, llegando a durar unas cuantas semanas o inclusive días. Es común asociar estos episodios con procesos económicos. La fuente principal de cambios en los precios de los activos es el arribo de nueva información sobre los valores fundamentales del activo. Al llegar ésta de forma rápida los inversionistas responden a ella de forma asimétrica, entonces se produce un episodio de volatilidad. (*cluster*).

GRÁFICA 1. TIPO DE CAMBIO NOMINAL
(Cotización diaria, 1997-2000)



Fuente: Banxico.

CUADRO 1. ESTADÍSTICAS BÁSICAS

Concepto	1995-1998	1995	1996	1997	1998
Media	0.066806	0.154584	0.016924	0.035236	0.060838
Mediana	0.000000	0.066511	-0.012937	-0.025377	0.000000
Desviación Estándar	1.278862	2.330834	0.327621	0.591910	0.779407
Asimetría (*Skewness*)	-2.187405	-1.655118	0.377621	4.648147	1.174909
Curtosis	57.08420	20.34221	4.120977	48.20563	13.32305
Jarque-Bera	126,234.3	3,389.844	19.8499	2,3340.92	1,125.540
Y_t para Q(14)	78.151	26.796	15.026	17.692	48.295
Y_t^2 para Q(14)	167.84	28.368	59.052	2.6857	27.428

Fuente: Elaboración propia con datos de Banxico

Si las crisis financieras ocurren con frecuencia, ¿ por qué entonces no se consideró esto en el modelo? Es decir, si se considera que a partir de 1976 el peso mexicano presenta devaluaciones periódicas, es justo preguntarse por un modelo que incluya los datos de 1970 a 1994, es decir, 24 años de cotizaciones diarias. Con esto la memoria de la serie indicaría un comportamiento regular cada seis años. Sin embargo, esto que estaba presente en la mente de los inversionistas nunca lo estuvo en los pronósticos puesto que éstos, a diferencia de los modelos físicos, se basan no sólo en la información pasada sino en las expectativas futuras, además de que el cambio de régimen cambiario (fijo por flexible) ocasiona severos cambios estructurales.

Así, aunque la información mostrada en la gráfica siguiente señala un periodo de estabilidad durante 1990-1994, su origen es explicable porque durante este periodo el tipo de cambio nominal se utilizó como ancla nominal para el programa de estabilización heterodoxo, signado en pactos económicos. Mientras que en el periodo que nos ocupa 1995-1998, el tipo de cambio se desenvuelve en un régimen de cambios flexibles con esporádicas intervenciones del Banco de México.

Por otra parte, el uso de la distribución normal tampoco suscita controversia, puesto que es la forma normal de inferir el comportamiento de las series de tiempo. No es, por tanto, un problema de elección de una distribución de probabilidad o de otra, sino de que la distribución que siguen las series financieras, aún suponiendo normalidad, presenta curtosis, es decir, que los extremos no disminuyen como predice la curva gausiana. Esto es, existe una gran probabilidad de encontrar valores altos en los extremos como en el centro de la curva. La figura 1 presenta una distribución normal, generada con base en una media igual a cero y una varianza constante igual a uno, y una distribución normal que exhibe curtosis, la cual puede ser calculada como el cuarto momento de la distribución de acuerdo con la siguiente formula.

$$K = \frac{1}{T\sigma^4} \sum_{t=1}^{T} (R_t - \mu)^4 \qquad (3)$$

Donde K es curtosis, T es el periodo de la muestra, m y s son como antes la media y la varianza, respectivamente. La curtosis de una variable que se distribuye normalmente es 3. En contraste, la curtosis muestral de las cotizaciones diarias fué de 48.2 para 1997. Pero la mayor curtosis se encuentra en 1995. El cuadro 1 muestra como inclusive con tipo de cambio flexible la curtosis se ha mantenido en valores altos.

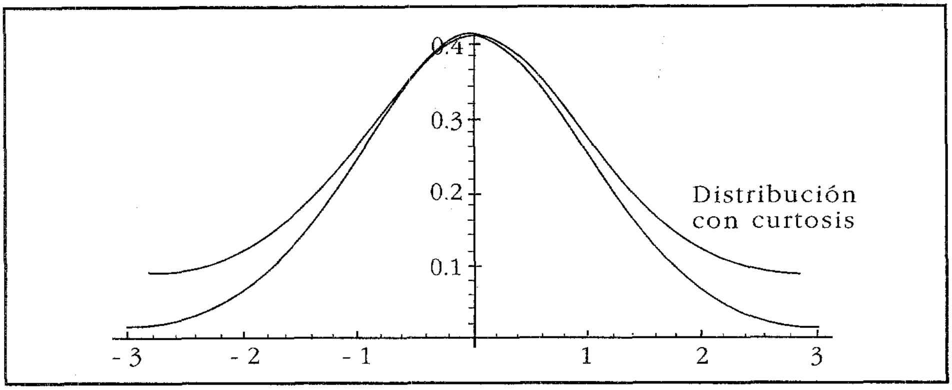
El análisis de regresión supone que el término de error sigue una distribución normal con media cero. En un histograma el término de error debería parecerse a una distribución normal. Un contraste para saber si los errores se distribuyen de forma normal es el estadístico Jarque-bera[11]. Este contraste (test) se establece con ayuda de la siguiente prueba de hipótesis.

[11] Veáse, el Dr. Carlos Jarque, coautor de esta prueba, fue durante varios años director del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, INEGI.

H_0: Los datos de la serie de residuales se distribuyen normalmente.

Ha: Los datos de la serie de residuales no sigue una distribución normal.

FIGURA 1. DISTRIBUCIÓN NORMAL CON MEDIA CERO Y VARIANZA CONSTANTE



El estadístico Jarque-Bera se distribuye como un x^2 con 2 grados de libertad. Donde k es el número de regresores estimados, S es el valor de K el de la curtosis.

$$X^2 = \frac{(n-k)}{6}\left[S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2\right] \qquad (4)$$

La existencia de la curtosis confronta los modelos de valuación de activos. El precio de una acción al momento de ejercerse la opciones puede estar subestimado debido a la curtosis y por tanto las posibilidades de neutralizar el riesgo se ven totalmente canceladas. Si la distribución de los rendimientos de una acción fueran los de una normal, entonces el precio de ejercicio seguiría una distribución lognormal. Pero la curtosis no desaparece con la transformación lognormal por lo que el precio fijado por una opción queda del todo fuera del rango de protección que la misma opción fija. La opción se convierte en un costo para el inversionista, un seguro que no asegura.

También para el emisor de las opciones puede esta situación presentar pérdidas, por ejemplo, un opción de compra (que permite al subscriptor de la misma, el derecho pero no la obligación de comprar una acción por 100 pesos para el fin de mes, cuando la acción se cotiza en el mercado al momento en 90 pesos. Esta opción llegará al fin de mes con un precio positivo si el precio de la acción se incrementa en una cantidad considerable. Pero si la distribución de los rendimientos de la acción presenta curtosis, entonces es muy probable que esto ocurra por lo que la acción debería costar más al descontar el valor presente. Este problema de sesgo en el precio de una opción ocurre porque hemos supuesto que inexistencia de curtosis, es decir que los dos extremos son simétricos. Si además relajamos este supuesto y pensamos que no son simétricos o que la distribución tiene más curtosis, podemos mejorar el modelo basado en la distribución normal claro está considerando explícitamente la estimación de la distribución con curtosis. Pero el hecho fundamental es que la volatilidad no es constante. La volatilidad es estocástica y por lo tanto aunque las transformaciones que realicemos a las series nos permitan estabilizar la varianza, lograríamos con esto sólo modelar la varianza no condicional, puesto que la varianza condicional, es decir aquella que cambia con el tiempo y que depende de lo ocurrido en el momento actual, esa, sólo puede ser tratada como un parámetro, sino como un proceso estocástico. En particular, se ha observado que sólo uno de los extremos es más grueso. Por lo que el modelo de Black-Scholes presentaría un sesgo asimétrico.[12]

La estadística se caracteriza porque los datos que utiliza provienen de series de tiempo vistas como procesos estocásticos. A diferencia de la econometría tradicional que dedica un gran esfuerzo a la estimación de parámetros y utiliza ya sea datos de corte transversal o datos de panel, la estadística basa su análisis en los datos ordenados en periodos referidos al tiempo, días, semanas, meses. Los métodos para estudiar las series de tiempo financieras pueden estar basados en simples extrapolaciones o bien en modelos que tomen en cuenta el proceso generador de datos (PGD). Estos modelos tienen la particularidad de ser de tipo aleatorio y por lo tanto la serie de tiempo se visualiza como un proceso estocástico que puede ser estacionario o no y describen los procesos de caminata aleatoria que presentan los mercados financieros. En este sentido, a diferencia de la econometría tradicional, una parte importante de este artículo se dedica a las series de tiempo no estacionarias y a las series integradas. Se discuten los

[12] John C. Hull. *Options, Futures, and other derivatives*, ed. Prentice Hall 3ra. Edicion, 1997, pag. 493-494

problemas que origina la no estabilidad de la distribución de probabilidad de un activo y la estimación de su volatilidad. Se presenta un modelo desarrollado por Robert Engle (1982) donde se prueba su utilidad para medir la volatilidad de las series de tiempo financieras. Demostraremos esto usando las cotizaciones diarias del peso. En principio, esta técnica también puede ser usada para pronosticar la volatilidad, pero en la práctica existe evidencia de que las series financieras tienen volatilidades que siguen paseos aleatorios.

Modelos para la varianza condicional

Como se señaló en la sección anterior, un desarrollo importante es el de considerar a la volatilidad, no como un parámetro sino como un proceso. Además, hemos visto que el término volatilidad se aplica en diferentes contextos, es tiempo entonces de definirla exactamente en términos del análisis de series de tiempo. Se dice que una serie de tiempo se vuelve más volátil durante ciertos periodos, además por el análisis de regresión se sabe que una serie de tiempo {yt} es un proceso estocástico, tal que cada y_t es una variable aleatoria la cual es generada por una distribución particular, tales como la normal o la distribución t. Ahora si X y Y son dos variables simétricas decimos que X es más volátil que Y si $p(|X| > c) > P(|Y| > c)$ para toda c. La volatilidad de una serie de tiempo {yt} se incrementa o decrementa en el tiempo T si $p(|Yt+1| > c)$ es mayor o menor que $P(|Yt| > c)$ para todo c. Sin embargo, para series con distribución normal o t de Student se puede demostrar que la volatilidad se incrementa de acuerdo con la definición si y sólo si la varianza condicional se incrementa.

El método de la hetoroscedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH) que se utiliza actualmente no es más que una extensión del análisis de regresión lineal tal que, se ajusta a un modelo para la varianza condicional de la serie de tiempo además de la regresión basada en la media condicional. Esto es, un GARCH es un ajuste usado para medir la volatilidad de una serie de tiempo financiera suponiendo que el supuesto de normalidad o de la distribución t es válido.

Una distinción fundamental que debemos hacer antes de proseguir es la que existe entre un proceso integrado y uno estacionario. Estos últimos tienen la propiedad de la reversión a la media, la cual permite en principio, que pueden ser pronosticadas. En cambio, los procesos integrados, de los cuales el paseo aleatorio es un ejemplo típico, uno que no puede pronosticarse, ya que el mejor predictor del valor futuro es el valor actual.

La definición precisa de un proceso (débilmente) estacionario {yt}es aquel cuya media y varianza no condicional son constantes en el tiempo, la correlación entre dos variables depende únicamente del retraso entre ellas y no en el punto en el tiempo t en el cual éstas fueron medidas. Un proceso el cual no es estacionario se llama "intregrado de orden n" y se denota por I(n), donde n es el número de veces en que la operación de diferenciación debe aplicarse para lograr que el proceso sea estacionario. Si {yt} es una variable aleatoria entonces yt ~ I(1) porque Δyt ~ I(0).

Para el lector novel resultará útil pensar en un proceso autorregresivo de orden 1 como el siguiente.

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad 0 \leq \rho \leq 1 \qquad (5)$$

Donde ε_t son los errores independiente e idénticamente distribuidos (o sea ruido blanco). El modelo (4) es un proceso autorregresivo.

La estacionaridad implica que $E(y_t) = E(y_{t-1})$ y también que

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t) / (1-\rho) = 0 \qquad (6)$$

Pero la media condicional $E(y_t)$ es ρy_{t-1}, porque se conoce en el tiempo t, la varianza condicional $V_t(y_t) = V(\varepsilon_t)$ y la varianza no condicional es

$$V(y_t) = V(\varepsilon_t) / (1-\rho^2) \qquad (7)$$

$E(y_t)$ y $V(y_t)$ deben ser constantes finitas si $\{y_t\}$ es estacionaria, tal que (5) define un proceso estacionario si $\rho<1$. En el caso en que $\rho=1$ tenemos un paseo aleatorio, el cual tiene una media y una varianza no condicional infinita.

Desde 1982, año en que Robert Engle propuso los modelos ARCH[13], éstos se han utilizado para estimar la varianza condicional, su uso constante ha resultado en una metodología de estimación de la volatilidad. El modelo de Robert Engle amplia el enfoque de Box-Jenkins de construcción e identificación de modelos ARIMA[14], en cuanto que la serie de tiempo debe previamente ser transformada para estabilizar tanto la varianza como la media si es que originalmente no es estacionaria. Una vez identificado un modelo por series de tiempo, si los residuales mantienen un comportamiento heteroscedástico será preciso estudiar la forma precisa en que se relacionan los residuales en el tiempo.[15] De esta manera al modelo de series de tiempo, descrito por el número de parámetros del modelo ARIMA, en la ecuación 4, habrá de incorporársele una ecuación extra para la varianza condicional.

$$y_t = m + \varepsilon_t \tag{8.1}$$

$$h_t = \omega + \alpha\varepsilon^2_{t-1} + \beta h^2_{t-1} \tag{8.2}$$

Así queda definido y_t como el rendimiento de un activo financiero o en nuestro caso la tasa del tipo de cambio y m la tasa esperada de depreciación, entonces h será la varianza condicional de y_t, y $h_t \equiv \mathrm{Var}(y_t \mid \Omega_{t-1}) = E((y_t - m_t)^2 \mid \Omega_{t-1})$, donde Ω_{t-1} es el conjunto de información disponible en $t-1$, de aquí que el modelo GARCH habitual se denote primero por la ecuación 7.2, y puesto que la varianza condicional, h_t, sirve para el pronóstico un periodo adelante se construye con la varianza observada (σ^2_t). Esta última, se espe-

[13] ARCH se refiere a un proceso autorregresivo con varianza condicional. Este modelo fue originalmente desarrollado por R. Engle, en "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica* 50:987-1008, mientras que GARCH corresponde al modelo desarrollado por Bollerslev, Tim (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31, 307–327.

[14] Veáse, el excelente libro de Víctor Guerrero. *Análisis de Series de Tiempo Económicas*, UAM-I, 1991 y una presentación en Guillermo Martínez Atilano "El análisis de series de tiempo" *Serie de Investigación* No. 11, UAM-I. 1993.

[15] Es importante hacer notar que el modelo no generalizado o ARCH ha probado ser útil como una prueba de diagnóstico de los residuales, puesto que con este modelo es posible realizar el contraste de homoscedasticidad de los residuales. En el caso de los modelos ARIMA, la estabilización de la varianza no condicional es un requisito para la identificación de este tipo de modelos.

cifica con base en tres parámetros: el valor promedio ω, la volatilidad del periodo pasado ε^2_{t-1}, medida como el rezago del error residual o término ARCH, y el coeficiente β o pronóstico de la varianza en un periodo anterior, también conocido como GARCH de Bollerslev (1986). De esta manera la varianza condicional es el resultado de las tres variables antes consideradas y se denomina modelo GARCH(1,1), puesto que se incluye tanto la ecuación para la varianza condicional como una corrección al pronóstico realizado un periodo anterior.

La especificación mostrada en 7.2 es una aproximación a la volatilidad y al riesgo que enfrentan los inversionistas. Si el rendimiento del activo fue de manera no prevista demasiado grande en la dirección al alza o a la baja, entonces el agente incrementará su estimación de la varianza para el siguiente periodo. Este modelo también es consistente con los periodos de alta volatilidad que en la práctica suceden a periodos de relativa estabilidad. En el caso de que la volatilidad exhiba persistencia, el modelo GARCH(1,1) deja de ser el modelo apropiado para varianza condicional, y es por tanto necesario utilizar una especificación diferente para la serie de tiempo. Este modelo es capaz de capturar tres aspectos empíricos en los datos de rendimientos del Tipo de Cambio: leptocurtosis, sesgamiento y agrupamiento de la volatilidad. Existen dos representaciones alternativas a la ecuación de la varianza que pueden ayudar en la identificación del modelo apropiado. La primera se basa en la idea de que la persistencia de la volatilidad proviene de un cambio en la media; este sería el caso si el premio al riesgo es variable. En gestión financiera, este tema se ha trabajado por el hecho de que los betas del CAPM[16], mencionado anteriormente, no son constantes. En nuestro caso, significa, igualmente, que el premio al riesgo no es constante. Los estimadores en la ecuación de varianza pueden extenderse para incluir regresores predeterminados o exógenos en la ecuación para la media, ecuación 7.1.

El modelo GARH-M es una extensión a los modelos GARCH.

$$y_t = a_0 + \sum_{i=t}^{m} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{m} \beta_i x_{t-i} + \delta h_t^{\lambda} + u_t \qquad (9.1)$$

[16] Veáse, por ejemplo, Fama, E. (1986). *Theory of Finance*, Basil Blckwell, England, para una descripción más completa del modelo CAPM (Capital Asset Price Model).

$$u_t = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{r} \theta_i \varepsilon_{t-i} \qquad (9.2)$$

$$E\left[\varepsilon_t^2 \Phi_{t-1}\right] = h = \gamma_o + \sum_{i=1}^{\rho} \gamma_i \overset{2}{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{i=0}^{q} \phi_i h_{t-1} + \vartheta \xi_t \qquad (9.3)$$

Pero en este último modelo la inclusión de la ecuación 9.3 señala que existe reversión a la media. Es decir que se mantiene la volatilidad y se integra en la serie de tiempo. El examen de los pronósticos de largo plazo de la varianza condicional de los modelos GARCH motivó la descomposición en componentes como demuestra Robert Engle.[17] Así, un GARCH(2,2) representa el proceso subyacente para la varianza condicional definida en el modelo de componentes. Asimismo, como señala Engle (1996), el modelo de componentes puede ser resumido en un modelo GARCH(1,1) si $\alpha=\beta=0$ o bien $\rho=\phi=0$ en la ecuación 8.2. Esto significa que un modelo GARCH(1,1) representa un componente de la varianza condicional: el permanente si la varianza condicional es integrada.

Existen otras especificaciones para la varianza condicional con una raíz unitaria. Dentro de ellas el más conocido es el proceso integrado o también IGARCH(2,2). En este caso, los choques son persistentes, Bolleslev (1986). Para ver esto, se requiere examinar los efectos de los choques en los componentes de la varianza condicional. El *test* de persistencia de la volatilidad en el modelo de componentes es un contraste de raíces unitarias para la ecuación de tendencia. Como puede observarse por la ecuación 8.2, el contraste de integración en la varianza condicional es equivalente al contraste de raíces unitarias en los modelos ARMA aplicados a los residuales. Por último, es conveniente advertir que se trata de procesos no lineales, por lo que la estimación requiere el uso de métodos numéricos que permitan encontrar la solución al sistema de ecuaciones que se deriva de la especificación ARCH.

[17] Engle, Robert, Lee Gary G.J (1993) "A Permanent and Transitory Component Model of Stock Return Volatility, *ARCH models*, vol 3 serie lecturas dirigida por Granger y Engle, 107-177.

Selección del modelo correcto

En las dos secciones anteriores hemos visto que el desarrollo de la moderna gestión financiera, es decir del comportamiento de los inversionistas en situaciones de riesgo, ha conocido un importante desarrollo en los diferentes modelos de valuación de activos financieros. Además, se ha mejorado el análisis de series de tiempo gracias a la inclusión de la varianza condicional, es decir de la volatilidad estocástica.

Sin embargo, parecería que los desarrollos han provenido de la estadística y no de la gestión financiera. Es importante, señalar que éste no ha sido el caso, puesto que el desarrollo ha sido en simultaneo. Primero, se estableció como paradigma, la hipótesis de eficiencia de mercado, es decir que no es posible obtener pronósticos mejores que el promedio, pues esto llevaría a que se obtuvieran ganancias extraordinarias. Esta hipótesis guió el trabajo econométrico representado por los modelos ARIMA de paseo aleatorio. Sin embargo, más adelante se consideró, que no obstante que la serie siguiera un paseo aleatorio para el valor promedio, podría presentar periodos de alta volatilidad, ocasionados por la sobrerreacción de los inversionistas a las noticias desfavorables, es decir un comportamiento no lineal respecto a la información. La no linealidad es la base de los modelos GARCH. Ahora bien, ¿ pueden entonces los modelos de corte microeconómico darnos la pauta para los pronósticos de corto plazo? Siguiendo con el ejemplo del pronóstico de las cotizaciones diarias del peso, la respuesta es afirmativa, siempre que la volatilidad no siga un paseo aleatorio. Aún con modelos de tipo GARCH que corrijan el precio de una opción valuada con el modelo Black-Scholes no sería posible pronosticar la fuerte devaluación del peso desde esta perspectiva, porque las series son no estacionarias lo mismo que la volatilidad que las caracteriza.

Bibliografía

Arrow, Keneth, Frank Hahn. 1979. *Equilibrio General Competitivo,* Fondo de Cultura Económico, México.

Black, Fischer and Myron Scholes. 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy,* vol. 81 (May– June), pp. 637–59.

Bollerslev, Tim Peter. 1986. "Generalized Autoregressive Conditional heteroskedasticity." *Journal of Econometrics,* vol. 31, pp. 307–27.

Engle, Robert F. 1982. "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of UK Inflation." *Econometrica,* vol. 50, pp. 987–1008.

Engle, Robert, Lee Gary G. J. 1993. "A Permanent and Transitory Component Model of Stock Return Volatility", *ARCH Models,* vol. 3, Serie Lecturas, dirigida por Granger y Engle, 107-177.

Fama, E. y M. Miller. *Theory of Finance,* Basil Backwell, 1972.

Fama, E. "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work" *Journal of Finance,* 25 (mayo de 1970). 384-87.

Hull, John C. 1997. *Options, Futures, and Other Derivatives.* Third Edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Krugman, Paul. 1979. "A Model of Balance of Payments Crises." *Journal of Money, Credit and Banking,* vol. 11, pp. 311–25.

Markowitz, H. 1959. *Porffolio Selection: Efficient Diversification of Investments,* John Wiley & Sons,Inc. Nueva York.

Sharpe,W. 1970. *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, Nueva York.

Tobin, J. 1958. "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economics Studies*, 25 (Febrero), 65-86.