Una reformulación del modelo neoclásico de crecimiento económico

Miguel Álvarez Texocotitla[1]

Shaní Alvarez-Hernández[2]

M. David Alvarez-Hernández[3]

Resumen

El presente artículo tiene como propósito fundamental el ofrecer una nueva presentación, completa y diáfana, del modelo Neoclásico de crecimiento económico. Para ello se muestra en primera instancia el marco teórico mínimo para la construcción y justificación del modelo. Posteriormente, se procede a resolver el modelo como un problema de optimización dinámica, mediante la utilización de las ecuaciones de Euler-Lagrange, para después proseguir con un análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio del modelo. Por último, utilizando algunos parámetros concretos, se construye el espacio fase del modelo.

Abstract

The fundamental purpose of the present research article is to offer a new presentation, complete and understandable, of the Neoclassical model of economic growth. In the first place, the minimum theoretical frame is presented for the construction and justification of the model. Afterwards, the model is posed and solved as a problem of dynamic optimization by means of the Euler-Lagrange equations, only to then proceed with the stability analysis of the model's equilibrium points. Lastly, the phase space of the model is constructed, using specific parameters.

Clasificación JEL/JEL Classification: A23, C02, C61, O40

1 Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Departamento de Economía, Área de Teoría Económica.

2 Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Departamento de Matemáticas.

3 King´s College London, Department of Mathematics.

Palabras clave/keywords: Economía Matemática, Modelos de Crecimiento Económico, Optimización Dinámica, Mathematical Economics, Economic Growth Models, Dynamic Optimization.

1. Introducción

Uno de los principales problemas que enfrentan actualmente la mayoría de las economías del mundo es su bajo nivel de crecimiento. Este problema es fundamental ya que el empleo y el bienestar de una sociedad están ligados al correcto desempeño de su economía.

Se han dado diversas explicaciones teóricas sobre los determinantes del crecimiento económico. En primera instancia, se consideran los factores de producción básicos, el capital físico y trabajo, considerados elementos que explican el crecimiento. Como un avance, se relaciona el crecimiento económico con la productividad; en este ámbito se destaca al progreso tecnológico y al capital humano determinantes importantes de la productividad y, en consecuencia, del crecimiento.

Más allá de los factores inmediatos señalados, la literatura teórica del crecimiento menciona algunos factores fundamentales que inciden de forma relevante sobre el crecimiento. En este contexto sobresalen aspectos tales como los regímenes políticos de gobierno, la desigualdad, la cultura, la geografía, entre otros.

Por las razones anteriores, el crecimiento económico constituye, hoy por hoy, un tema que por sus implicaciones debe ser estudiado en todos sus aspectos. En consecuencia, la presente investigación tiene como objetivo analizar la dinámica de un modelo clave en la teoría del crecimiento económico, el modelo Neoclásico, un modelo de crecimiento basado en el análisis de optimización del consumidor de Ramsey, Cass y Koopmas[4].

Existen diversas exposiciones del modelo Neoclásico de crecimiento, donde la mayoría se sitúa en alguno de los dos extremos siguientes:

4 Ramsey (1928), Cass (1965), Cass & Shell (1976).

por un lado se encuentran las exposiciones que presentan el modelo con demasiado rigor matemático; introducen técnicas avanzadas de optimización (por ejemplo, el principio de Pontryagin o la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman)[5], que si bien no son complicadas en extremo, obstaculizan el entendimiento del modelo, además, no clarifican en su totalidad la justificación y la metodología de dichas técnicas. Por el otro extremo se tienen las exposiciones del modelo Neoclásico con un menor nivel de rigor matemático; estas presentaciones sólo ofrecen, a modo de recetario, la metodología de solución al problema de optimización del modelo. La simplicidad matemática de la exposición, en muchos casos, no evita cometer errores de presentación, incluso no impide tener errores en la construcción del modelo mismo.

Por lo tanto, el objetivo primordial de este trabajo es llenar el vacío que existe en la presentación del modelo Neoclásico en ambos extremos, con un nivel de rigor matemático que no dificulte su presentación y teniendo el mínimo de formalidad matemática para explicitar los fundamentos del modelo y evitar errores.

En la primera sección del presente artículo de investigación se ofrece un marco teórico que coadyuva y justifica el estudio de la dinámica del modelo Neoclásico; aquí se presentan y analizan los términos, conceptos y supuestos que permiten la construcción del modelo. En la segunda sección se analiza el modelo Neoclásico de crecimiento, un modelo que acepta el efecto de la acumulación del capital físico sobre el crecimiento e incorpora el problema de la optimización de la utilidad presente. Este modelo se distingue de modelos anteriores de crecimiento al introducir el consumo de forma explícita y considerarlo como una variable que impacta la dinámica de largo plazo de la producción. Considerando la existencia del hogar representativo, el modelo Neoclásico interpreta el crecimiento económico como un problema de optimización dinámica.

Una vez definido el problema de optimización, se implementan las ecuaciones de Euler-Lagrange para resolver el modelo. Estas ecuacio-

5 Para el lector interesado, se recomienda revisar Acemoglu (2009), Lomelí y Rumbros (2005), o Pedregal (2004).

nes, al ser desarrolladas, expresan las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de las trayectorias que satisfacen el problema de maximización; es decir, las soluciones de tales ecuaciones diferenciales son trayectorias óptimas que se analizarán en el espacio fase. La razón por la cual se analizan en el espacio fase es debido a que ofrece un análisis cualitativo-visual de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, que permite discernir las características globales de la dinámica del modelo, y además ofrece pistas sobre la existencia o no existencia de puntos de equilibrio. De esta manera, se muestra un ejemplo concreto de este modelo donde se presentan sus respectivos puntos de equilibrio y su espacio fase, así como un análisis de la estabilidad local de éstos. Por último, se ofrecen las conclusiones de la presente investigación.

2. Marco Teórico

John Stuart Mill sostenía que la economía política era la ciencia que enseña a un país cómo volverse rico. Posteriormente, Alfred Marshall sustituyó el término economía política por el término teoría económica reduciendo considerablemente el dominio de la ciencia económica. El mensaje básico de Marshall era simple: bajo ciertas condiciones, un sistema económico basado en la libre competencia crearía una distribución óptima de los recursos escasos que la sociedad tiene a su disposición para satisfacer las necesidades de sus miembros. De esta manera, la ciencia económica se convirtió en la teoría que estudia el comportamiento humano como una relación entre los fines y los medios escasos, los cuales pueden tener usos alternativos. En una terminología más moderna, la teoría económica se intentó convertir en una ciencia universal de toma de decisiones bajo condiciones restrictivas y de escasez (Álvarez Texocotitla y Alvarez-Hernández, 2015).

Es en este enfoque neoclásico que la teoría económica asume hay ciertas condiciones acerca del mundo social que pretende examinar. Esta teoría parte del supuesto de que la sociedad se compone solamente de agentes económicos (consumidores y productores) que maximizan respectivamente la utilidad o el beneficio; asimismo, admite la racionalidad de los individuos para alcanzar su interés personal. Por consiguiente, los modelos de crecimiento económico, así como otros modelos económicos, ya sean básicos o de un nivel más sofisticado, comparten esos supuestos fundamentales, los cuales se discutirán a continuación.

2.1. La estructura y condición de equilibrio del mercado

La mayoría de los modelos de crecimiento consideran una economía en la que existe un solo mercado en el cual interactúan muchos agentes económicos. Estos agentes pueden agruparse en consumidores (individuos u hogares) y productores (empresas). La homogeneidad de los agentes y las empresas permite suponer que las decisiones económicas de éstos pueden ser representadas por las decisiones de un solo hogar y empresa representativos.

Ambos intercambian en el mercado un solo bien de consumo/producción, el cual se denota como capital físico. Este único bien representativo se utiliza simultáneamente como un bien de consumo y como un insumo de producción[6].

Además de la existencia de un solo bien, se asume que existe otro factor económico, el cual afecta únicamente al proceso productivo (es decir, sólo funciona como un insumo de producción). A este factor se le denomina trabajo. La combinación de ambos factores (capital físico y trabajo) tiene lugar en el proceso productivo y desemboca en la producción de más capital físico, el cual puede o no utilizarse nuevamente en el proceso productivo.

En general, se considera que la estructura del mercado donde participan ambos agentes es de competencia perfecta. Es decir, el hogar y la empresa actúan como agentes que toman sus decisiones independientemente de los precios de mercado asociados a los insumos de producción y del bien representativo.

6 Al igual que en el caso del hogar y la empresa representativos, este bien se puede considerar como el agregado de todos los demás bienes en el mercado.

Se asume que el hogar es el propietario de los insumos de producción. Así, su ingreso Y_H (por la renta de dichos insumos a la empresa) estará dado por:

$$Y_H(t) = r_K(t)K_H(t) + w_L(t)L_H(t) \tag{1}$$

Donde r_K denota la tasa de rendimiento del capital físico K_H, y w_L denota el precio de renta del trabajo L_H (Acemoglu, 2009: 32).

Por otra parte, se considera que la empresa actúa conforme a la maximización de su beneficio. Para introducir la noción de maximización del beneficio se conjetura que el proceso productivo depende solamente de los insumos de producción (capital físico y trabajo) y que dicho proceso puede ser descrito mediante una función de producción $F(K_F; L_F)$. Es decir:

$$Y_F = F(K_F;\ L_F) \tag{2}$$

El capital físico puede incorporarse o salir del proceso productivo. Es decir, se incorpora al mercado nuevo capital, pero de igual forma se pierde capital cuando éste sale del mercado por desgaste, destrucción, avería, o por volverse obsoleto. Bajo esas consideraciones también se justifica el introducir una tasa de depreciación del capital δ, la cual se asumirá constante por simplicidad, i.e. $(\dot{K}(t)/K(t)) = -\delta$ (Barro & Sala-i-Martin, 2009: 32). Por lo tanto, el beneficio de la empresa se define en este contexto como:

$$\pi = F(K_F;\ L_F) - (r_K(t) + \delta)K_F(t) - (w_L(t)L_F(t)) \tag{3}$$

Donde π denota el beneficio de la empresa reportado en unidades de capital físico obtenidas en un intervalo de tiempo, Y_F denota la producción realizada por la empresa expresada de igual forma en unidades de capital físico por periodo de tiempo, K_F representa la cantidad de capital físico utilizado por la empresa y L_F la cantidad de unidades de trabajo utilizadas en el intervalo de tiempo de producción (Pindyck y Rubinfeld, 2009).

La condición de equilibrio de mercado se cumple cuando la demanda de los factores de producción por parte de la empresa es igual a la oferta suministrada por el hogar:

$$L_F = L_H = L, \qquad K_F = K_H = K$$

El equilibrio de mercado garantiza la condición de maximización del beneficio de la empresa, y esto implica que, en condiciones de equilibrio, la función de producción deba satisfacer las siguientes condiciones[7]:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = r_K + \delta, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = w_L \tag{4}$$

En los modelos de crecimiento es preferible trabajar las variables económicas en términos per cápita, ya que esto permite estudiar las variables en forma normalizada respecto al tamaño de la población. Esta reformulación está sustentada en la hipótesis de que en el equilibrio de mercado todo el trabajo es empleado; es decir, cada agente/habitante otorga exactamente una unidad de trabajo, independientemente del precio asociado a dicho factor.

Por lo tanto, asumiendo que el stock de población al tiempo t puede ser representado mediante una función $P(t)$, y considerando que éste crece de forma exponencial y por tanto a una tasa de crecimiento constante $(P(t)/P(t)) = n$ [8], el factor trabajo se puede re-expresar como[9]:

$$L(t) = P(t) = e^{nt} \tag{5}$$

7 La maximización que realiza la empresa consiste en encontrar las cantidades óptimas de K y L, tales que el beneficio sea máximo. Por lo tanto, bajo el supuesto que la tasa de rendimiento del capital y el precio del trabajo sean constantes, el beneficio es máximo sólo si se satisfacen las condiciones $\partial_K \pi = 0$, $\partial_L \pi = 0$.

8 En ocasiones, para simplificar la notación, no se hará explícita la dependencia temporal de las variables. Cuando se realicen operaciones de derivación respecto del tiempo se utilizará la notación de punto de Newton. Y se utilizará la notación de comas cuando la derivación sea respecto de las variables en el argumento.

9 Por simplicidad se considera que la población inicial se encuentra normalizada a uno, i.e. $P(0) = 1$.

La reformulación del factor trabajo en términos del stock de población permite transformar las variables originales en variables per cápita.

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{P(t)}, \quad y(t) \equiv \frac{Y(t)}{P(t)}, \quad f(k) \equiv \frac{F(K;P)}{P(t)}$$

2.2 La función de producción

Ya que en el mundo real la producción requiere la utilización de diversos factores de producción, los modelos de crecimiento económico contemplan como mínimo dos elementos: el capital físico $K(t)$ y el trabajo $L(t)$. Así, en teoría el proceso de producción depende fundamentalmente de la forma de la función de producción.

Por otro lado, la teoría neoclásica considera admisible suponer que la función de producción satisfaga las siguientes condiciones:

- **Esencialidad.** Cada una de las variables involucradas en F (en este caso el capital físico y el trabajo) debe satisfacer:

$$F(0;L) = F(K;0) = 0$$

Esto implica que sólo puede haber producción cuando todos los factores productivos participan.

- **Rendimientos constantes a escala.** La función de producción F es una función homogénea de grado uno en todas sus variables:

$$F(\alpha K;\alpha L) = \alpha F(K;L)$$

Es decir, si se multiplica el capital y el trabajo por la misma constante positiva α, se obtiene α veces la cantidad de producción.

- **Rendimientos positivos y decrecientes de los factores.** La función de producción F debe ser dos veces diferenciable en cada una de sus variables, y debe satisfacer:

$$\partial F_K > 0, \qquad \partial F_{KK} < 0$$
$$\partial F_L > 0, \qquad \partial F_{LL} < 0$$

El significado de esta condición es el siguiente. Si se mantiene constante el nivel de trabajo, cada unidad adicional de capital utilizado tiene un efecto positivo en el nivel de producción, pero el efecto sobre la producción disminuye a medida que el número de unidades de capital utilizadas aumenta. Al trabajo se le supone la misma propiedad (Barro & Sala-i-Martin, 2009:29). Esta condición es importante, porque garantiza que la función de producción sea monótona creciente y cóncava; características que son esenciales al considerar un problema de optimización.

- **Condiciones de Inada.** Los productos marginales de los insumos de producción (en este caso del capital físico y el trabajo) deben satisfacer:

$$\lim_{K\to 0} \partial F_K = \lim_{L\to 0} \partial F_L = \infty \qquad \lim_{K\to \infty} \partial F_K = \lim_{L\to \infty} \partial F_L = 0$$

La justificación económica de las condiciones de Inada está fundamentada empíricamente (Acemoglu, 2009:33). Los primeros incrementos de capital y de trabajo (cuando K y L son cercanos a cero) son altamente productivos, es decir, tienen un gran efecto en la producción. Sin embargo, cuando ambos factores son suficientemente abundantes (cuando K y L son muy grandes), sus productos marginales son cercanos a cero.

Las condiciones neoclásicas impuestas a la función de producción restringen en gran medida el campo de funciones que pueden utilizarse para representar la producción, no obstante, se han construido funciones que satisfacen dichas condiciones, en especial la función de Cobb-Douglas[10]:

$$F(K;L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \tag{6}$$

Esta función es la más utilizada en los modelos de crecimiento económico, ya que, además de satisfacer las condiciones neoclásicas, permite representar de forma sencilla el comportamiento de la producción. El coeficiente α representa el grado de distribución de la producción y del ingreso (en el equilibrio de mercado) entre el capital y el trabajo. Un

10 Esta función fue propuesta por el matemático Charles Cobb y el economista Paul Douglas en 1928.

valor mayor de α implica que la mayor parte del ingreso le corresponde al capital; ocurre el efecto contrario cuando α disminuye.

Aunque el uso de la función de Cobb-Douglas es común en la literatura sobre crecimiento económico, prácticamente en ningún texto de este campo se hace explícito el origen teórico de la función, o se revela a partir de qué principios económicos se deriva.

Considerando lo anterior, se procede a mostrar que la función de producción puede derivarse y justificarse en base a ciertos principios. Para ello sólo es necesario utilizar como fundamento la ecuación de ingreso Eq. (1) para calcular la forma explícita que la función de producción debe tener.

Partiendo de la ecuación Eq. (1), se relaja la condición de invariabilidad del rendimiento del capital y del precio del trabajo; ahora ambos pueden cambiar en el tiempo. Asimismo, se reescribe la ecuación en variables per cápita y se deriva respecto del tiempo:

$$\dot{y}(t) = \dot{r}_K(t)k(t) + r_K(t)\dot{k}(t) + \dot{w}_L(t)$$

Desarrollando la expresión:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{r(t)k(t)}{y(t)}\left(\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}\right) + \frac{r(t)k(t)}{y(t)}\left(\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\right) + \frac{w(t)}{y(t)}\left(\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\right)$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \beta\left(\frac{\dot{r}}{r}\right) + \beta\left(\frac{\dot{k}}{k}\right) + (1-\beta)\left(\frac{\dot{w}}{w}\right) \tag{7}$$

Donde se ha definido $\beta(t) \equiv \frac{r(t)k(t)}{y(t)}$ como la participación del capital en la producción, y $(1-\beta(t)) \equiv \frac{w(t)n}{y(t)}$ como la participación del trabajo en la producción.

Si se considera la hipótesis de Cobb-Douglas de que las participaciones del capital y el trabajo permanecen constantes a lo largo del proceso productivo, i.e. $\beta(t) = \alpha$, y que el rendimiento del capital y el precio del trabajo permanecen invariables, i.e. $\dot{r} = \dot{w} = 0$, entonces la relación Eq. (7) puede integrarse directamente.

El resultado final sería la función de Cobb-Douglas:

$$y(t) = f(k) = a_0 k^{\alpha}, \qquad Y(t) = F(K; L) = a_0 K^{\alpha} (L)^{1-\alpha} \quad (8)$$

Con a_0 una constante de integración que puede ser normalizada a uno.

2.3 La función de utilidad

Una de las hipótesis fundamentales de la teoría neoclásica es que el grado de bienestar de los agentes económicos puede modelarse a través de una función de utilidad, y que estos toman sus decisiones económicas en función de la maximización de su bienestar.

Considérese una economía de un solo mercado, donde la cantidad de consumidores que participan en el mercado puede ser representada por medio de un conjunto contable denotado por H=[1,2,…,n]. A cada consumidor se le asocia una función de utilidad instantánea, la cual depende únicamente de su nivel de consumo en cada periodo t. Así, la función de utilidad es de la forma:

$$U_h\big(C_h(t)\big) \quad (9)$$

Siendo $C_h \in \mathbb{R}_+$ la función consumo, y $U_h \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la función de utilidad correspondiente al consumidor $h \in H$. La forma exacta de la función de utilidad no se encuentra especificada; no obstante, se asume que la función debe, en primera instancia, satisfacer las propiedades de una función monótonamente creciente de concavidad negativa (Barro & Sala-i-Martin, 2009: 87).

Por otra parte, existen tres hipótesis principales que se contemplan al describir la forma explícita de la función de utilidad. La primera es que los consumidores no derivan utilidad alguna del consumo de otros agentes, de esta manera las externalidades del consumo están totalmente descartadas. La segunda es que la función de utilidad se considera independiente de los niveles de consumo pasados o futuros (i.e. la utilidad instantánea es invariable respecto al tiempo, y en consecuencia la función de utilidad es la misma para todo periodo *t*). La tercera es que los consumidores descuentan la utilidad futura de manera exponencial.

Por lo tanto, cada consumidor $h \in H$ busca maximizar el valor presente de su utilidad $U_{(0)}$, el cual está descrito, en tiempo continuo, por:

$$U_{(0)h} = \int_0^T U_h(C_h(t))e^{-\rho t} \tag{10}$$

Donde $e^{-\rho t}$ es el factor de descuento que se realiza con una tasa de descuento subjetiva ρ estrictamente mayor a cero ($\rho > 0$), y T es el horizonte de planeación del consumidor, el cual puede ser finito ($T = t$) o infinito ($T = \infty$) (Acemoglu, 2009:148).

Considerando que es permisible suponer la homogeneidad de los consumidores, y por ende la existencia de un hogar representativo, el problema general de optimización para *n* consumidores se transforma en un solo problema de optimización[11]. En consecuencia, las acciones económicas que realizan los consumidores pueden ser representadas como la búsqueda de la solución al problema de maximización (Acemoglu, 2009:150):

$$\max_C U_{(0)} = \max_C \left[\int_0^T U\big(C(t)\big)e^{-\rho t} \right] \tag{11}$$

3. El modelo neoclásico de crecimiento

En esta sección se define el modelo Neoclásico como un problema de optimización dinámica, que se resuelve utilizando las ecuaciones Euler-Lagrange. Una vez desarrolladas tales ecuaciones, éstas permiten obtener las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de las trayectorias óptimas de consumo y capital y satisfacen el problema de optimización de la utilidad. Posteriormente, se calculan los puntos de equilibrio del modelo y se realiza un análisis de estabilidad local

11 Bajo este supuesto se elimina la notación de índices.

de dichos puntos para confirmar los resultados encontrados por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

3.1 La estructura del modelo

La principal diferencia del modelo Neoclásico de crecimiento económico con respecto a otros modelos de crecimiento (por ejemplo, el modelo de Solow-Swan) es la consideración explícita del consumo como una variable que impacta la dinámica de largo plazo de la producción. Esta discrepancia surge al considerar el problema del crecimiento económico como un problema de optimización, en el cual el hogar representativo busca maximizar su utilidad, sujeta a ciertas restricciones.

La versión básica del modelo Neoclásico se construye en el contexto de una economía cerrada, en la cual existe un solo mercado donde se produce y consume un solo bien, que puede transformarse ya sea en un insumo de producción (por ejemplo, capital físico) o en un bien de consumo. Se asume también que el principio de agregación es válido (existencia de un hogar representativo) y, por lo tanto, el problema general de optimización de todos los agentes que participan en el mercado puede reducirse a resolver un solo problema de optimización[12].

Dado que la optimización se realiza en forma intertemporal, considerando el flujo futuro de utilidad, el agente optimiza el valor presente de su utilidad en un horizonte de tiempo infinito $[0, \infty)$; es decir, busca maximizar la siguiente expresión[13]:

$$\max_{C} u_{(0)} = \max_{C}\left[\int_0^{\infty} u\big(c(t)\big)e^{-\rho t}\right] \tag{12}$$

Para resolver este problema de maximización es necesario definir la forma explícita de la función de utilidad y, por ende, proponer una di-

12 Para una explicación más detallada sobre los orígenes del modelo Neoclásico, se recomienda revisar Cass (1965), Romer (1996) y Acemoglu (2009).

13 Se ha definido la utilidad al valor presente per cápita como:
$\frac{U_{(0)}}{L(t)} = \int_0^{\infty} \frac{U(C(t))}{L(t)} e^{-\rho t} = \int_0^{\infty} u(c(t))e^{-\rho t}.$

námica para el consumo. Por ello, el modelo Neoclásico considera que el ahorro del hogar representativo está descrito explícitamente en términos del ingreso $Y(t)$ y del consumo $C(t)$. Así, utilizando la relación de ingreso Eq. (1), se obtiene:

$$S(t) = Y(t) - C(t) = r_K(t)K(t) + w_L(t)L(t) - C(t) \quad (13)$$

A partir de la anterior relación se establece la conexión entre la maximización de la utilidad y la dinámica de la producción. En el contexto de una economía cerrada, se puede considerar que todo el ahorro del hogar representativo está dedicado a la inversión. Dado que la acumulación de capital físico es directamente proporcional a la inversión, la ecuación que describe la dinámica de acumulación del capital es la siguiente:

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t) = S(t) = r_K(t)K(t) + w_L(t)L(t) - C(t) \quad (14)$$

Para reducir el número de variables involucradas en la Eq. (14) y obtener una ecuación diferencial en una variable, se introducen variables per cápita. Así[14]:

$$\dot{k}(t) = r_K(t)k(t) + w_L(t) - c(t) - nk(t) \quad (15)$$

Luego, considerando la condición de maximización del beneficio de la empresa, Eq. (4), se reescriben dichas condiciones en términos de variables per cápita:

$$f'(k) = r_K(t) + \delta, \qquad f(k) - kf'(k) = w_L(t)$$

En consecuencia, introduciendo estas condiciones en la relación Eq. (15), se obtiene la ecuación de acumulación del capital, también conocida como la ecuación de Solow-Swan:

$$\dot{k}(t) = f(k) + (n + \delta)k(t) - c(t) \quad (16)$$

Para resolver esta ecuación y determinar la dinámica del capital físico es necesario definir la forma explícita de la función de producción y resolver de forma simultánea la maximización de la utilidad. Es en este

14 Se ha definido el consumo per cápita como: $c(t) \equiv \frac{C(t)}{P(t)}$

contexto que el modelo se puede interpretar como un problema de optimización dinámica.

En síntesis, el modelo Neoclásico considera que el problema de crecimiento económico puede tratarse como un problema de optimización, al asumir que el hogar representativo busca maximizar su utilidad presente:

$$\max_{C}\left[\int_{0}^{\infty} u(c(t))e^{-\rho t}\right] \tag{17}$$

Sujeto a la restricción de la acumulación de capital:

$$\dot{k}(t) = f(k) - (n+\delta)k(t) - c(t) \tag{18}$$

Con la condición inicial y de transversalidad:

$$k(0) = k_0 > 0, \qquad 0 \le c(t) \le f(k)$$

$$\lim_{t\to\infty}[k(t)e^{-\rho t}] = 0$$

La condición inicial indica que el hogar siempre inicia con un stock de capital físico diferente de cero y el nivel de consumo debe ser positivo, pero acotado por el nivel de producción; mientras que la condición de transversalidad garantiza tanto la existencia como la unicidad de un equilibrio óptimo, ya que señala que el valor presente del stock de capital, al final del horizonte de planeación, debe ser cero.

3.2 El crecimiento como un problema de optimización dinámica

El sistema a estudiar es descrito por el funcional de costo Eq. (17), donde $c \in (M \subset \mathbb{R})$ representa el vector unidimensional de control del sistema, o lo que es lo mismo en este contexto, el consumo per cápita, y *M* es un conjunto convexo contenido en los números reales. Asimismo, la optimización de Eq. (17) está sujeta al vector de estado unidimensional *k*, el capital físico per cápita, que evoluciona de acuerdo a la ecuación de estado Eq. (18). Para propósitos de este análisis, debido a que

k y c son unidimensionales, se puede considerar el conjunto convexo como $M = \mathbb{R}$.

Dada la función de consumo c(t), el funcional de costo expresa el flujo de utilidad cuando se descuenta de forma exponencial el valor futuro. En otras palabras, expresa el flujo de utilidad a valor presente:

$$I[t,k,c] = \int_0^\infty F(t,k(t),c(t))dt$$

Donde $F = u(c(t))\, e^{(n-\rho)t}$. Por otro lado, la ecuación de estado es dada por:

$$\dot{k}(t) = f(k) - (n+\delta)k(t) - c(t)$$

Y tiene como condición inicial $k(0) = k_0$, junto con la restricción para el consumo $0 \leq c(t) \leq f(k)$.

Al par de funciones ($\boldsymbol{k}(t)$; $\boldsymbol{c}(t)$) que satisface la ecuación de estado, la condición inicial y la condición de transversalidad del problema de optimización, se le llama par admisible. El problema de optimización entonces consiste en encontrar un par admisible ($\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}$) tal que:

$$I[t,k,c] \leq I[t,\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}]$$

Para todos los pares admisibles (k, c) y para todo $t \in [0,\infty)$.

La condición necesaria para que k y c puedan considerarse como un par admisible, i.e. que sean extremos del funcional $I[k, c]$, es que cumplan las condiciones:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{c}}\right] - \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{k}}\right] - \frac{\partial F}{\partial k} = 0 \tag{20}$$

Las ecuaciones Eq. (19) y Eq. (20) se conocen como las ecuaciones de Euler-Lagrange, y las soluciones de dichas ecuaciones diferenciales son soluciones óptimas del funcional $I[k, c]$ (Pedregal, 2004: 196).

Por otra parte, se permite considerar la ecuación de estado como una restricción puntual que se puede tratar dentro del funcional de costo al introducir una variable de coestado $p(t)$[15]. En el ámbito económico esta variable de coestado, denominada precio sombra, transforma el capital físico $k(t)$ en términos de la utilidad. Así, podemos considerar el siguiente funcional de costo aumentado:

$$I^*(t,k,c,p,\dot{k}) = \int_0^\infty \left[F(t,k(t),c(t)) + p(t)\left(f(k) - (n+\delta)k(t) - c(t) - \dot{k}(t)\right)\right] dt$$

$$I^*(t,k,c,p,\dot{k}) = \int_0^\infty \left[u(c(t))e^{-\rho t} + p(t)\left(f(k) - (n+\delta)k(t) - c(t) - \dot{k}(t)\right)\right] dt \tag{21}$$

Por lo tanto, se buscan las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange para el funcional aumentado I^*. Para ello se define el lagrangiano del modelo:

$$L(t,k,c,p,\dot{k}) = u(c(t))e^{-\rho t} + p(t)\left(f(k) - (n+\delta)k(t) - c(t) - \dot{k}(t)\right)$$

Si se quiere eliminar la dependencia del lagrangiano respecto al tiempo, se define un lagrangiano en tiempo presente:

$$G(k,c,p,\dot{k}) = L(t,k,c,p,\dot{k})e^{\rho t} \tag{22}$$

Y una variable de coestado también en tiempo presente:

$$q(t) = p(t)e^{\rho t} \tag{23}$$

Por consiguiente:

$$G(t,k,c,p,\dot{k}) = u(c(t)) + q(t)\left(f(k) - (n+\delta)k(t) - c(t) - \dot{k}(t)\right) \tag{24}$$

15 Esta variable de co-estado puede pensarse como un continuo de multiplicadores de Lagrange.

La introducción de estas nuevas definiciones afecta las condiciones de Euler-Lagrange. Así, el nuevo sistema de Euler-Lagrange correspondiente al lagrangiano en tiempo presente Eq. (24) se expresa como:

$$(-\rho)\frac{\partial G}{\partial \dot{k}}+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{k}}\right]=\frac{\partial G}{\partial k} \tag{25}$$

$$(-\rho)\frac{\partial G}{\partial \dot{c}}+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{c}}\right]=\frac{\partial G}{\partial c} \tag{26}$$

$$(-\rho)\frac{\partial G}{\partial \dot{q}}+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{q}}\right]=\frac{\partial G}{\partial q} \tag{27}$$

Se procede a resolver el sistema de ecuaciones Eqs. (25-27). Para la primera ecuación de Euler-Lagrange se obtiene:

$$(-\rho)\frac{\partial G}{\partial \dot{k}}+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{k}}\right]=\rho q(t)-\dot{q}(t)=q(t)[f'(k)-(n+\delta)]=\frac{\partial G}{\partial k} \tag{28}$$

En la segunda ecuación de Euler-Lagrange se tiene:

$$(-\rho)\frac{\partial G}{\partial \dot{c}}+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{c}}\right]=0=u'(c)-q(t)=\frac{\partial G}{\partial c} \tag{29}$$

Y en la tercera ecuación Euler-Lagrange se obtiene:

$$(-\rho)\frac{\partial G}{\partial \dot{q}}+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{q}}\right]=0=f(k)-(n+\delta)k(t)-c(t)-\dot{k}(t)=\frac{\partial G}{\partial q} \tag{30}$$

Dado que las ecuaciones Euler-Lagrange resultantes deben resolverse en forma simultánea, conviene simplificar el sistema de ecuaciones. El orden del sistema puede reducirse si se considera que de la ecuación Eq. (29) se derivan las siguientes relaciones:

$$q(t)=u'(c)$$

$$\dot{q}(t)=u''(c)\dot{c}(t)$$

Sustituyendo las anteriores relaciones en la ecuación Eq. (28), se deriva una ecuación diferencial de primer orden en $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = -\frac{u'(c)}{u''(c)}[f'(k) - (n + \delta + \rho)]$$

Obteniendo de esta forma un sistema de ecuaciones diferenciales de dos variables constituido por las ecuaciones siguientes:

$$\dot{k}(t) = f(k) - (n + \delta)k(t) - c(t) \tag{31}$$

$$\dot{c}(t) = -\frac{u'(c)}{u''(c)}[f'(k) - (n + \delta + \rho)] \tag{32}$$

Como puede observarse, se han obtenido el par de ecuaciones clásicas de primer orden del modelo Neoclásico (Acemoglu (2009), Barro & Sala-i-Martin (2009), y Romer (1996)). Las soluciones del sistema de ecuaciones Eq. (31) y Eq. (32) determinarán las trayectorias óptimas de consumo y capital físico per cápita del problema de optimización.

Las ecuaciones Eq. (31) y Eq. (32) forman un sistema no lineal de ecuaciones, por ende, no puede resolverse en forma analítica. No obstante, es posible analizar el sistema mediante métodos cualitativos, tal como se procede en la siguiente sección[16].

3.3 Puntos de equilibrio y análisis de estabilidad local

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema, se buscan los valores (k^*, c^*) que cumplan las condiciones siguientes:

$$\dot{k}(t) = 0 = f(k^*) - (n + \delta)k^* - c^*$$

$$\dot{c}(t) = 0 = -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)}[f'(k^*) - (n + \delta + \rho)]$$

16 Al lector interesado en estos métodos se recomienda revisar Lomelí y Rumbros (2005), y Shone (2002).

En consecuencia, se tienen tres posibles pares de puntos de equilibrio

$$(k^*, c^*) = (0,0), \qquad (k^*, c^*) = (k_2, c_2)\,, \qquad (k^*, c^*) = (k_3, 0)$$

Tal que cumplan las relaciones siguientes:

$$f(k_3) = (n+\delta)k_3, \quad f'(k_2) = (n+\delta+\rho), \quad c_2 = f(k_2) - (n+\delta)k_2.$$

Para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio se procede a construir la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones:

$$\mathbb{J}(k,c) = \begin{pmatrix} f'(k) - (n+\delta) & -1 \\ -\frac{u'(c)}{u''(c)} f''(k) & \left(\frac{u'(c)}{(u'')^2} u'''(c) - 1\right)\left(f'(k) - (n+\delta+\rho)\right) \end{pmatrix} \tag{33}$$

Los eigenvalores asociados al jacobiano del sistema se obtienen al resolver la ecuación característica:

$$Det[\mathbb{J} - \lambda \mathbb{I}] = 0$$

Por consiguiente, los eigenvalores de la matriz jacobiana están dados por:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a} = -\frac{T(\mathbb{J})}{2} \pm \sqrt{\frac{T(\mathbb{J})^2}{4} - D(\mathbb{J})} \tag{34}$$

Donde T y D representan la traza y el determinante de la matriz $\mathbb{J}$, que a su vez se definen como:

$$D(\mathbb{J}) = a = -\frac{u'(c)}{u''(c)} f''(k) + \left(\frac{u'(c)}{(u'')^2} u'''(c) - 1\right)\left(f'(k) - (n+\delta)\right)\left(f'(k) - (n+\delta+\rho)\right) \tag{35}$$

$$T(\mathbb{J}) = b = \left(\frac{u'(c)}{(u'')^2} u'''(c)\right)\left(f'(k) - (n+\delta+\rho)\right) + (\rho) \tag{36}$$

Como muestran las ecuaciones Eq. (35) y Eq. (36) puede haber diferentes tipos de estabilidad, ya que los eigenvalores del modelo dependen directamente de la forma explícita de las funciones de producción y utilidad.

Los puntos de equilibrio y su estabilidad no pueden determinarse de forma exacta mientras no sea especificada la estructura de las funciones de producción y utilidad. Para analizar un caso concreto, se proponen los siguientes tipos de funciones; en el caso de la producción, se tomará una función de tipo Cobb-Douglas, Eq.(8), y en el de la utilidad una función de tipo CRRA[17]:

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} & si\ \theta \neq 1 \\ \ln c & si\ \theta = 1 \end{cases}$$

Donde $0 < \theta \leq 1$ es un coeficiente constante que simboliza el coeficiente de aversión al riesgo (Romer, 1996: 40). En consecuencia, incorporando la función de Cobb-Douglas en Eq. (31), y sustituyendo

$$u'(c) = c^{-\theta}, \qquad u''(c) = -\theta c^{-\theta-1}, \qquad f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$$

en la ecuación Eq. (32), se obtiene el nuevo sistema de ecuaciones:

$$\dot{k}(t) = k^{\alpha} - (n+\delta)k(t) - c(t) \tag{37}$$

$$\dot{c}(t) = \frac{c(t)}{\theta}\left[\alpha k^{\alpha-1} - (n+\delta+\rho)\right] \tag{38}$$

Con puntos de equilibrio en:

$$(k_1, c_1) = \left(\left(\frac{n+\delta+\rho}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \left(\frac{n+\delta+\rho}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (n+\delta)\left(\frac{n+\delta+\rho}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)$$

$$(k_2, c_2) = \left((n+\delta)^{\frac{1}{\alpha-1}}, 0\right),$$

Cabe resaltar que en este caso concreto, el origen $(k, c) = (0, 0)$ no es punto de equilibrio debido a la indeterminación que se obtiene en la ecuación Eq. (38) al hacer $k = 0$, ya que α está definido entre cero y uno.

17 El acrónimo significa coeficiente relativo de aversión al riesgo. Esta función de utilidad también recibe la denominación de utilidad isoelástica.

Prosiguiendo con el análisis del sistema de ecuaciones Eqs. (37-38), la matriz jacobiana asociada a dicho sistema es la siguiente:

$$\mathbb{J}(k,c)=\begin{pmatrix}\alpha k^{\alpha-1}-(n+\delta) & -1\\ \left(\frac{c}{\theta}\right)\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} & \left(\frac{1}{\theta}\right)\left(\alpha k^{\alpha-1}-(n+\delta+\rho)\right)\end{pmatrix}\qquad(39)$$

La estabilidad de los puntos de equilibrio está determinada por los eigenvalores del jacobiano Eq. (39), evaluado en cada punto de equilibrio.

Ahora se procede a determinar la estabilidad de cada punto de equilibrio. Para el primer punto de equilibrio (k_1, c_1) se obtiene lo siguiente:

$$T[\mathbb{J}(k_1,c_1)]=\rho,\quad D[\mathbb{J}(k_1,c_1)]=\frac{c_1}{\theta}\left(\alpha(\alpha-1)\left(\frac{n+\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\right)$$

Dado que la traza es positiva, y el determinante es negativo, se concluye que el primer punto de equilibrio corresponde a un punto silla. Este punto de equilibrio es un punto inestable, ya que las trayectorias escapan o divergen del punto a excepción de la variedad estable, que es la única trayectoria que va exclusivamente al punto de equilibrio.

Este punto de equilibrio es el más relevante del modelo. La justificación es: al dar un valor inicial para el capital físico, existe un valor inicial único de consumo tal que el sistema se ubica en la variedad estable del punto silla; es decir, la trayectoria de consumo y capital convergen al estado estacionario (k_1, c_1).

Por último, para el segundo punto de equilibrio (k_2, 0), se tienen los siguientes resultados

$$T[\mathbb{J}(k_2,0)]=\frac{\alpha(\theta+1)(n+\delta)-(n+\delta+\rho)-\theta(n+\delta)}{\theta}$$

$$D[\mathbb{J}(k_2,0)]=\frac{\left((\alpha-1)(n+\delta)\right)^2-\rho(\alpha-1)(n+\delta)}{\theta}$$

Debido a que la traza y el determinante son positivos, y que en general $T^2 > 4D$, tenemos que los eigenvalores asociados al segundo punto de equilibrio son reales distintos de signo negativo. Por lo tanto, el segundo punto de equilibrio es estable y corresponde a un nodo atractor; es decir, todas las trayectorias en la vecindad del punto de equilibrio convergen en el punto mismo. Sin embargo, este punto no es relevante en términos económicos, ya que implica un estado final de equilibrio con nivel de consumo cero.

3.4 Espacio fase del modelo

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales Eq. (37) y Eq. (38) se analizan en el espacio fase, ya que éste ofrece un análisis cualitativo-visual de la dinámica global del modelo. Para la construcción del espacio fase del modelo se examinan tres casos particulares, considerando los parámetros $\alpha = \frac{1}{3},\ \theta = 0.1$.

El espacio fase del modelo es dividido en cuatro regiones delimitadas por las ceroclinas de las ecuaciones Eq. (37) y Eq. (38). Asimismo, la intersección de las ceroclinas define la posición exacta de los puntos de equilibrio en el espacio fase[18].

La ceroclina correspondiente a $\dot{c}(t) = 0$, es una línea recta en el espacio fase, ya que existe un único nivel de capital físico per cápita ($k(t) = k_1$) que puede mantener el consumo per cápita constante. Para los puntos en el espacio fase localizados a la izquierda de la ceroclina $\dot{c}(t) = 0$ tenemos que $\dot{c}(t) > 0$, y por lo tanto el consumo es creciente. A la derecha de la ceroclina tenemos la situación inversa, i.e. $\dot{c}(t) < 0$ y, en consecuencia, el nivel de consumo decrece.

La ceroclina correspondiente a $\dot{k}(t) = 0$ compete a los pares de valores de $(k(t), c(t))$ que mantienen al capital per cápita constante. Nótese que la ceroclina del capital alcanza su máximo valor en el punto $f'(k) = (n + \delta)$, el cual corresponde al nivel de capital k_1 de la regla de oro del consumo. Para todos los puntos por encima de la ceroclina

18 Las ceroclinas son aquellos puntos del espacio fase que cumplen la condición $\dot{k} = 0$ y $\dot{c} = 0$

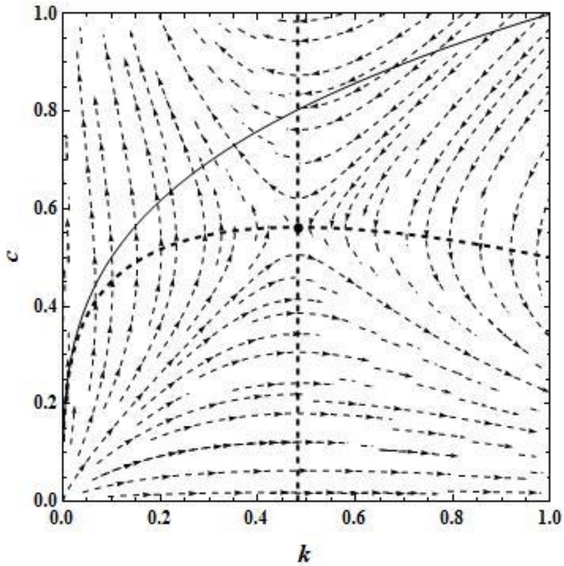
$\dot{k}(t) = 0$ tenemos que $\dot{k}(t) < 0$, por lo tanto, la cantidad de capital per cápita declina. Por debajo de la misma ceroclina tenemos la situación inversa, i.e. $\dot{k}(t) > 0$, es así que en dicha región la cantidad de capital per cápita aumenta.

Además, el plano fase es también separado en una forma más general por la función de producción $f(k) = k^{\alpha}$, creando así dos zonas. Las condiciones iniciales de $c(t)$ que estén por encima de la función de producción no son económicamente posibles, ya que se impuso la condición que el nivel de consumo nunca puede ser mayor al nivel de producción, i.e. $c(t) \leq f(k)$. Por consiguiente, las únicas condiciones iniciales y trayectorias óptimas, que son económicamente factibles en primera instancia, son las que se encuentra en la región limitada superiormente por la función de producción.

Ahora se procede al análisis de tres casos particulares. En los diagramas correspondientes a cada caso las ceroclinas están denotadas por líneas punteadas y la línea sólida representa la restricción al consumo. Los puntos en cada diagrama marcan el primer punto de equilibrio, pero el segundo punto de equilibrio no se observa por las limitaciones de visualización del diagrama.

La primera situación asume que el hogar representativo no descuenta el futuro, i.e. $\rho = 0$. En este caso, el primer punto de equilibrio del sistema se encuentra en el punto máximo de la ceroclina $\dot{k}(t) = 0$, lo cual implica que los niveles de consumo y capital per cápita de la regla de oro coinciden con el primer punto de equilibrio del sistema, tal como se muestra en el diagrama I.

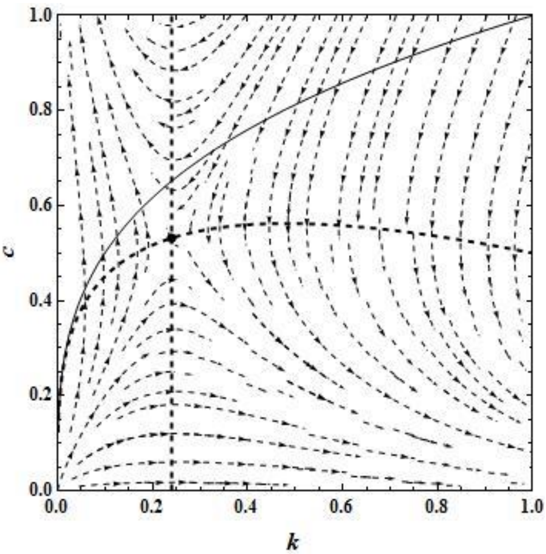
Diagrama I. Espacio fase con los parámetros $\delta = n = 0.1$, y $\rho = 0$



Los puntos de equilibrio se encuentran dentro de la región delimitada por la restricción a la función del consumo. Asimismo, el campo de direcciones confirma que el punto (k_1, c_1) es un punto silla, por lo que únicamente las trayectorias que estén ubicadas en la variedad estable del punto silla convergerán al punto de equilibrio conforme t tienda a infinito. El segundo punto de equilibrio $(k_2, 0)$, se distingue como un nodo atractor, alrededor del cual todas las trayectorias terminan en el punto.

Ahora se considera el segundo caso, cuando el hogar representativo sí descuenta el futuro con una tasa de descuento $\rho = 0.3$.

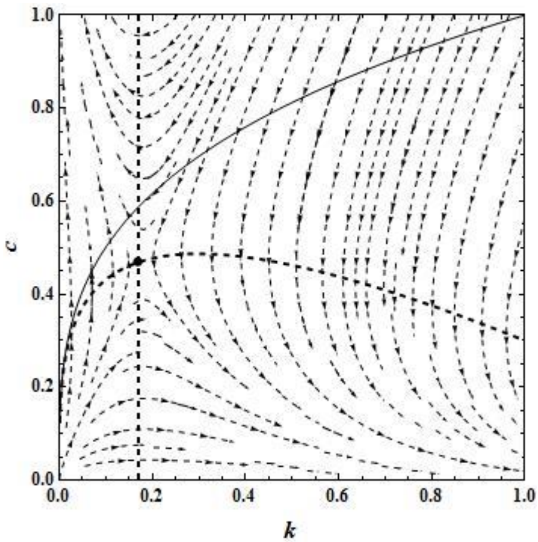
Diagrama II. Espacio fase con los parámetros $\delta = n = 0.1$, y $\rho = 0.3$



Como muestra el diagrama II, en el primer punto de equilibrio se tiene una cantidad menor tanto de capital per cápita como de consumo, si se compara con el obtenido en el primer caso. La razón es que la tasa de descuento actúa como una tasa de depreciación del capital físico. Sin embargo, la estabilidad de ambos puntos de equilibrio no se ve afectada por cambios en la tasa de descuento.

Finalmente, se analiza un tercer caso que corresponde a los efectos que tiene un aumento en la tasa de depreciación del capital δ, o de la tasa de crecimiento de la población n.

Diagrama III. Espacio fase con los parámetros
$\delta = 0.1$, $n = 0.3$, y $\rho = 0.3$



El diagrama III muestra que un aumento en la tasa de depreciación o de crecimiento de la población tiene como efecto el disminuir el nivel de equilibrio del capital y el consumo per cápita. Entre mayor sea el valor de estas tasas, más bajo será el nivel de equilibrio, y más cerca estará de la restricción impuesta por la función de producción. Adviértase que, al igual que el caso anterior, la estabilidad de los puntos de equilibrio no es afectada por los cambios en δ o en n.

4. Conclusiones

Esta investigación pretendió una nueva presentación, completa y límpida, del modelo Neoclásico de crecimiento económico. Se solucionó el modelo como un problema de optimización dinámica; se realizó un análisis de estabilidad de sus puntos de equilibrio, y se construyó el espacio fase del modelo. Por lo tanto, el objetivo primordial de esta investigación se alcanzó al presentar el modelo Neoclásico con un nivel de rigor matemático que no dificulta su exposición. A continuación, se desarrollan las conclusiones particulares.

En principio se esperaba que el sistema descrito por el modelo Neoclásico llegara a un punto de equilibrio óptimo donde las trayectorias de producción, capital físico y consumo crecieran uniformemente a una tasa constante; este punto de equilibrio efectivamente se alcanzó. Ya que en el punto de equilibrio óptimo las variables per cápita son constantes, entonces el capital $K(t)$ y el consumo $C(t)$, así como la producción $Y(t) = F(K, P)$ crecen a la misma tasa (n) que la población del hogar representativo. Esto implica que el modelo genera una trayectoria balanceada de crecimiento económico en la cual las variables económicas crecen a una tasa constante. Sin embargo, pese a esta virtud, el modelo es incapaz de generar un crecimiento sostenido de la producción per cápita.

Para el caso concreto de una función de utilidad CRRA, y una función de producción de tipo Cobb-Douglas, en el trabajo se determinaron dos puntos de equilibrio del modelo, y el correspondiente comportamiento del sistema alrededor de cada punto. El primer punto de equilibrio (k_1, c_1) posee la estabilidad de un punto silla, por lo que únicamente su variedad estable hará que todas las trayectorias en ella converjan al punto de equilibrio cuando el horizonte de planeación tienda a infinito. El segundo punto de equilibrio $(k_2, 0)$ es un nodo atractor, alrededor del cual todas las trayectorias terminan en el punto. Asimismo, se puede señalar que ambos puntos de equilibrio se encuentran dentro de la región delimitada por la restricción de la función de consumo.

Al analizar las trayectorias del espacio fase, se observa que las trayectorias localizadas en la vecindad del punto de equilibrio $(k_2, 0)$ tienden invariablemente a él debido a su carácter de nodo atractor. Estas trayectorias (aunque cumplan con las ecuaciones de Euler-Lagrange) no se consideran óptimas desde un punto de vista económico.

Es importante hacer notar que en las regiones aledañas al punto de equilibrio $(k_2, 0)$ las trayectorias decrecen hasta llegar a un estado de consumo cero, para cualquier valor inicial de capital $k(0) = \mathrm{k}_0$. Pero, esta circunstancia es económicamente inviable debido a que no puede existir un hogar representativo sin consumo.

En esos casos se alcanzan situaciones finales inconsistentes, lo que implica que para la mayoría de las condiciones iniciales de capital físico y de consumo per cápita se obtienen soluciones $\boldsymbol{k}(t)$ y $\boldsymbol{c}(t)$ que, si bien son óptimas, se alejan del punto de equilibrio, lo que ocasiona que tarde o temprano alguna de las variables se extinga.

Por otra parte, como el consumo per cápita de la familia representativa $c(t)$ se considera en numerosas ocasiones como una variable de control, la solución del problema de optimización dinámica del hogar puede reinterpretarse como un problema de control óptimo. Este problema de control óptimo radica en encontrar la condición inicial necesaria $\boldsymbol{c}(0) = \boldsymbol{c_0}$, tal que se obtenga una trayectoria óptima que satisfaga las ecuaciones de Euler-Lagrange, y que además pertenezca a la variedad estable del punto silla asociado al primer punto de equilibrio. Entonces, visto desde el punto de vista económico, el modelo Neoclásico sugiere la existencia de un solo punto de equilibrio admisible (k_1, c_1), y su variedad estable, en los cuales las soluciones al problema de optimización siempre terminarán en equilibrio.

Un hecho particular del modelo es que el equilibrio (o estado estacionario) del capital físico y del consumo per cápita depende directamente de la función de producción, así como de la tasa de descuento, la tasa de crecimiento y la tasa de depreciación. No obstante, dicho estado no depende de la función de utilidad, es por eso que podemos tomar diferentes tipos de funciones de utilidad con cierta libertad (siempre y cuando cumplan las condiciones necesarias). La forma de la función de utilidad afecta solamente la dinámica de transición, sin tener impacto alguno en el punto de equilibrio.

Finalmente, se desea expresar que el presente trabajo de investigación es el primer estudio que realizamos sobre la dinámica de los modelos de crecimiento económico. En el futuro inmediato analizaremos la dinámica de otros modelos de crecimiento que consideremos importantes para nuestra agenda de investigación de largo plazo que consiste en estudiar las relaciones entre deuda pública, crisis financiera y crecimiento económico.

Bibliografía

Acemoglu, D., *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, New York, 2009, p. 990.

Alvarez Texocotitla, Miguel, y M. David Alvarez-Hernández, "Una Revisión Crítica a los Modelos Básicos de Crecimiento Económico", *Denarius*, 29, 2015, pp. 191-252.

Barro, R. J. & X. Sala-i-Martin, *Crecimiento Económico*, Editorial Reverte, México, 2009, p. 654.

Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *The Review of Economic Studies*, 32, 3, 1965, pp. 233-240.

Cass, D. & K. Shell, "Introduction to Hamiltonian Dynamics in Economics", *Journal of Economic Theory*, 12, 1, 1976, pp. 1-10.

Lomelí, Héctor E. e Irma B. Rumbros, *Métodos dinámicos en economía*, Thomson Editores, México, 2005, p. 554.

Pedregal, P., I*ntroduction to Optimization*, Springer-Verlag, New York, 2004, p. 245.

Pindyck, R. S. y D. L. *Rubinfeld, Microeconomía*, 7ª ed., Pearson Prentice Hall, Madrid, 2009, p. 845.

Ramsey, F. P., "A Mathematical Theory of Saving", *The Economic Journal*, vol. 38, no. 152, 1928, pp. 543-559.

Romer, D., *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill, New York, 1996, p. 540.

Shone, Ronald, *Economic Dynamics*, Cambridge University Press, USA, 2002, p. 708.