Una revisión crítica a los modelos básicos de crecimiento económico

Miguel Álvarez Texocotitla[1]

M. David Álvarez Hernández[2]

Resumen

Presentar una revisión crítica a los modelos básicos de crecimiento económico es el objetivo principal de esta investigación. Se estudia con minuciosidad el modelo de Solow-Swan. Se identifica su base teórica, su estructura y su funcionamiento. Se hace una evalución del modelo explicitando sus resultados y sus limitaciones. A continuación, se analizan las modificaciones y ampliaciones más importantes al modelo Solow-Swan; es decir, se analiza ese modelo con progreso tecnológico, con funciones de producción tipo AK, con capital humano, con mejoras en el modelado de la población y con contaminación. Para cada uno de estos modelos se señalan sus objetivos, sus resultados y sus limitaciones. Asimismo, se analiza la validación econométrica de los modelos. En la ultima sección, se efectúa una evaluación crítica de todos los modelos investigados, con énfasis en los supuestos de la teoría económica que son los supuestos de los modelos de crecimiento. También se discuten las implicaciones del formalismo de la ciencia económica y del areá del crecimiento económico. Finalmente, se presentan las conclusiones y se señala la trayectoria que seguirá nuestra investigación sobre el crecimiento económico.

Palabras clave: modelos de crecimiento económico, Solow-Swan.

1 Profesor-Investigador del Departamento de Economía de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

2 Licenciado en Física por la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

Introducción

El crecimiento económico es uno de los problemas macroeconómicos fundamentales de una economía moderna; sin embargo, más que un problema exclusivamente económico, el crecimiento es un problema social de primera importancia por sus implicaciones para las personas. Un país con un crecimiento económico deficiente es más propenso al empobrecimiento y enfrentará una mayor inestabilidad política y social si no corrige el estancamiento económico. Los ejemplos históricos de esa situación son numerosos, se tiene el caso del magro desarrollo económico y social de los países latinoamericanos contra el desarrollo sostenido de los principales países de Europa Occidental. De esta manera, entender qué marcó la diferencia entre el crecimiento de los países avanzados y el crecimiento de los países pobres es un tema de suma importancia, principalmente para las naciones que no han logrado desarrollo pleno.

Los resultados de nuestras primeras indagaciones han mostrado que el análisis moderno del crecimiento económico está dividido en dos vertientes. La primera, está enfocada al estudio de los factores económicos inmediatos a través de la construcción de modelos matemáticos fundamentados en la teoría económica neoclásica. La otra vertiente analiza las causas fundamentales del crecimiento económico; en este nivel son clave la cultura, la geografía, la desigualdad económica y las instituciones (políticas y económicas) como variables que inciden sobre la productividad y el crecimiento.

La presente investigación se concentra en la primera vertiente, es decir, en los modelos de crecimiento de la teoría económica neoclásica. Empero, debido a la vastedad de modelos que se han construido, se tomó la decisión de elegir, en primera instancia, las aportaciones pioneras y dejar para el futuro inmediato las más recientes. Asimismo, es importante señalar que el presente artículo emana de nuestro proyecto de investigación de largo plazo que pretende incorporarse al debate que por siglos ha captado la atención de muchos científicos sociales: ¿por qué algunos países son ricos y la mayoría de países son pobres o porqué al interior de ellos un grupo pequeño es rico y la mayoría de la población es pobre?

La primera sección describe y analiza algunos fundamentos teóricos clave que comparten los seis modelos de crecimiento que se consideran en nuestra investigación. Estos fundamentos están relacionados principalmente con los conceptos del agente y la empresa representativos, los factores de producción y la función de producción. Esta tarea se considera esencial en cuanto contribuye a la comprensión cabal de los seis modelos y explicita el sustento teórico de los mismos, lo cual es importante para entender el alcance y la relevancia de los modelos de crecimiento económico. Posteriormente, en la segunda sección del artículo, se estudia con minuciosidad el modelo pionero de Solow-Swan. Se analiza su base teórica, su estructura y su funcionamiento. Finalmente, se evalúa el modelo explicitando sus resultados y sus limitaciones.

En la tercera sección, en ella se analizan las modificaciones y ampliaciones más importantes al modelo Solow-Swan. Es decir, se analiza el modelo Solow-Swan con progreso tecnológico, con funciones de producción tipo AK, con capital humano, con mejoras en el modelado de la población y con contaminación. Para cada uno de estos modelos se señalan sus objetivos, sus resultados y sus limitaciones. En la cuarta sección, se analiza la validación econométrica de los modelos de crecimiento discutidos en el presente artículo de investigación.

En la última sección, se efectúa una evaluación crítica de todos los modelos investigados, con énfasis en los supuestos teóricos de la teoría económica que son los supuestos de los modelos de crecimiento. Asimismo, se ponen de relieve las implicaciones del formalismo de la ciencia económica y del área del crecimiento económico. Todo ello para alcanzar el objetivo principal de esta investigación: una revisión crítica de los modelos básicos de crecimiento económico.

Finalmente, se presentan las conclusiones y se señala la trayectoria que seguirá nuestra investigación sobre este tema tan relevante y lleno de desafíos.

1. Algunos aspectos fundamentales de los modelos

John Stuart Mill sostenía que la economía política era la ciencia que enseña a un país cómo volverse rico. Posteriormente, Alfred Marshall sustituyó el término economía política por el término teoría económica y redujo considerablemente el dominio de la ciencia económica.

El mensaje básico de Marshall era simple: bajo ciertas condiciones, un sistema económico basado en la libre competencia creará una distribución óptima de los recursos escasos que la sociedad tiene a su disposición para satisfacer las necesidades de sus ciudadanos[3]. De esta manera, la ciencia económica se convirtió en la teoría que estudia el comportamiento humano como una relación entre los fines y los medios escasos, los cuales pueden tener usos alternativos. En una terminología más moderna, esta disciplina se intentó convertir en una ciencia universal de toma de decisiones bajo condiciones restrictivas y de escasez.

En este enfoque neoclásico, el mundo está poblado solamente por individuos (consumidores y productores) que persiguen su interés personal. Se asume que las empresas, los Estados y otros agentes económicos son agregados de esos agentes individuales. Se asume que cada individuo (sin importar su etnicidad, clase, o identidad nacional) actúa racionalmente (empleando un cálculo de costo beneficio) para alcanzar su interés personal. No hay diferencias fundamentales entre agentes económicos americanos, asiáticos, europeos o africanos. Se da por hecho que todos están buscando los mismos objetivos económicos. Lo unico que diferencia a las sociedades son las restricciones externas en la toma de decisiones y las oportunidades que deben aprovecharse.

3 Overtveldt (2007: 197).

Por lo que respecta a las empresas, éstas deben, independientemente de su nacionalidad, optimizar bajo restricciones dadas y responder efectivamente a las oportunidades, en los mercados altamente competitivos o cerrar. Desde esta perspectiva, la propiedad de los medios de producción y el origen nacional de las empresas son totalmente irrelevantes.

Los modelos básicos de crecimiento económico, en particular el modelo de Solow-Swan y sus ampliaciones, comparten este mundo social al ser parte fundamental de la teoría económica neoclásica. Este hecho obliga a explicitar, en la presente sección, las partes más importantes de los modelos para entenderlos mejor y ponerlos en contexto[4].

1.1. La familia y la empresa representativas

Los modelos de crecimiento que analizamos en el presente artículo consideran una economía en la que existe un solo mercado donde interactúan un gran número de agentes económicos, los cuales se pueden agrupar en: consumidores (agentes o familias) y productores (empresas).

Al no contener los modelos ninguna hipótesis sobre las preferencias de los consumidores, es decir, al no incorporar un problema de optimización de la utilidad, éstos suponen que todos los agentes que participan en la economía son homogéneos. La homogeneidad de los agentes permite suponer que todas las decisiones económicas que se realizan (consumo, ahorro, inversión, etc) pueden ser representadas por las decisiones de un solo agente representativo. Asimismo, se supone que en esta economía los productores y los bienes que producen también son homogéneos. Si todos los productores tienen acceso a las mismas formas de producción, entonces podemos representar todas sus decisiones económicas a través de las decisiones de una sola empresa representa-

4 Esta sección está basada principalmente en Acemoglu (2009: 26-34) y en Vialar (2009: 509-517).

tiva. Esta simplificación permite construir una función de producción agregada para todo el conjunto de la economía:

$$Y(t) = F(K_i(t)), \quad i = 1, 2, ...n \tag{1}$$

Donde la producción agregada ($Y(t)$) de un único bien representativo está en función de i =1, 2, ..., n factores de producción ($K_i(t)$). En la mayor parte de los modelos de crecimiento económico se requiere que la función de producción cumpla la siguiente condición:

Condición 1. *La función de producción* $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ *es dos veces diferenciable en* $K_i(t)$, y satisface:

$$F_{K_i}(K_i) = \frac{\partial F}{\partial K_i} > 0$$

$$F_{K_i K_i}(K_i) = \frac{\partial^2 F}{\partial K_i^2} < 0$$

Esta condición es importante, porque garantiza que la función de producción agregada sea monótona, creciente y cóncava. Por otra parte, la condición 1 también garantiza que los productos marginales de los factores de producción sean positivos y con rendimientos decrecientes; es decir, la adición de una unidad más del factor de producción tendrá un efecto cada vez menor en el incremento de la producción. Una condición adicional que se requiere de la función de producción es que muestre rendimientos constantes de escala:

Condición 2. *La función de producción F es una función homogénea de grado uno en todas sus variables* $K_i(t)$, *es decir*:

$$F(\lambda K_i(t)) = \lambda F(K_i(t))$$

La condición 2 establece que si se duplican la cantidad de todos los factores de producción, ésta se duplicará exactamente.

Una vez establecidas las anteriores condiciones, se determina cómo van a interactuar los consumidores y los productores. Como una primera hipótesis, se parte del supuesto de que el agente y la empresa representativa van a interactuar en una condición de mercado competitivo, en la cual el agente es el propietario de la dotación inicial de los factores de producción y la empresa es la arrendataria de los insumos de producción.

La condición de equilibrio del mercado se cumple cuando la demanda de los factores de producción por parte de la empresa es igual a la oferta suministrada por el agente:

$$K_i(t) = \tilde{K}_i(t) \tag{2}$$

Donde $K_i(t)$ la demanda de los factores de producción y $\widetilde{K}_i(t)$ denota la oferta de los factores de producción. La condición establecida en (2) se debe cumplir para cualquier periodo *t*.

Asimismo, se supone que el agente suministra los factores de producción de forma inelástica; es decir, siempre existe una dotación inicial de los factores de producción, los cuales son suministrados constantemente, independientemente de su precio de mercado. Por otra parte, se supone que la empresa busca maximizar sus ganancias ($\pi(t)$), entonces, bajo el supuesto de que existe una función de producción agregada (1), el problema de maximización de la empresa está dado por:

$$\max_{K_i} \ \pi(t) = \max_{K_i} \ \left[F(K_i) - \sum_{i=1}^{n} w_i(t) K_i \right] \tag{3}$$

Donde $w_i(t)$ es el precio de los factores de producción. No hay ningún precio multiplicando a $F(K_i)$, ya que el precio del bien final puede ser normalizado a uno. El equilibrio de mercado implica que la empresa debe lograr cero ganancias; pues de otra manera, la empresa buscaría contratar grandes cantidades de los factores de producción; sin embargo, rebasaría la cantidad de equilibrio ofertada por el agente. Entonces, se tiene que los precios de los factores de producción deben satisfacer la condición:

$$w_i(t) = F_{K_i}(K_i) = \frac{\partial F}{\partial K_i} \tag{4}$$

Es decir, la empresa contratará los insumos de producción hasta el punto donde los precios marginales de los factores de producción sean iguales a los de dichos insumos. Por lo tanto, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.1 *Si las condiciones 1 y 2 se cumplen, entonces en la condición de equilibrio del mercado, las empresas (empresa representativa) hacen cero ganancias, y en particular la producción agregada está dada por:*

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)K_i(t)$$

El resultado de la proposición 2.1 implica que el pago a los insumos de producción agota por completo el valor de la producción fabricada, por lo que no hay ganancias económicas en el estado de equilibrio del mercado. Debido a que la empresa hace cero ganancias, su propiedad no necesita ser especificada, todo lo que se necesita saber es que la empresa es un agente que maximiza ganancias. Por otra parte, de la ecuación (1) y de la condición de equilibrio (2) se observa que el ingreso que percibe el agente ($Y(t)$) por el suministro de los factores de producción está dada por:

$$\tilde{Y}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\tilde{K}_i(t) = Y(t) \tag{5}$$

El resultado de la ecuación (5) nos permite considerar (como también se hará en los siguientes modelos) que el ingreso que percibe el agente es igual al valor de la producción agregada (es decir, a los ingresos provenientes de la producción). Por consiguiente, aunque el agente no sea el que dirige el proceso productivo, sus decisiones de consumo, ahorro e inversión son las unicas que realmente importan en estos modelos básicos que consideran la existencia de un solo mercado de competencia perfecta.

1.2. Los factores de producción

Hasta ahora sólo se ha mencionado que el agente cuenta con una dotación inicial de n factores de producción, los cuales son indispensables para el proceso productivo; sin embargo, ¿cuáles son los factores que se consideran en los modelos de crecimiento?

Los factores o insumos de producción que se consideraran primordiales son básicamente cuatro: el capital físico ($K(t)$), el capital humano ($H(t)$), el trabajo ($L(t)$) y la tecnología ($A(t)$). Las razones que han llevado a la elección de estos factores están sustentadas principalmente en observaciones empíricas. Tradicionalmente, los factores que siempre se han considerado han sido el capital y el trabajo; no obstante, se han incorporado factores adicionales cuando los resultados de los modelos han sido insatisfactorios.

A continuación mencionaremos algunas de las principales características que poseen los factores de producción. Estas son importantes porque, en gran medida, son estas características las que determinan la estructura de las funciones de producción que se consideran en los modelos de crecimiento económico.

El capital físico $K(t)$ representa los recursos u objetos que son necesarios para la producción, como la maquinaria, las herramientas, los inventarios, la infraestructura, etc. El capital físico tiene cuatro características clave:

1. Es productivo. Su uso aumenta la cantidad de bienes que pueden producir los trabajadores.

2. Es producido. Se necesita construir o crear a partir de recursos naturales[5] o del capital físico existente; esto implica que una parte de la producción siempre está asignada a la producción de más capital.

3. Es rival en su uso. Un bien de capital sólo puede ser utilizado por un número limitado de trabajadores cada vez; incluso en el caso de la infraestructura (por ejemplo, las redes viales), aunque sea utilizada por un gran número de personas, ésta tiene una capacidad finita de utilización.

4. Es perecedero. Los bienes de capital sufren un desgaste o depreciación por el uso o por el paso del tiempo. En gran parte, la inversión realizada en la economía está dedicada a reponer el capital que se ha depreciado.

El capital humano $H(t)$ representa el conjunto de conocimientos, habilidades, competencias y otras características relacionadas con la productividad del trabajo; es decir, el capital humano representa la eficiencia de las unidades de trabajo. Este término se origina en la observación de los individuos, que invierten en la mejora de sus habilidades y competencias laborales de la misma forma en que las empresas invierten en su capital físico para incrementar su productividad.

El capital humano tiene las mismas características que el capital físico, a excepción, quizás, de la rivalidad en su uso. Esta diferencia es utilizada en la argumentación de muchos modelos de crecimiento económico, que consideran que el capital humano no muestra los rendimientos decrecientes que presenta el capital físico; sin embargo, no es del todo aceptada esta suposición.

El factor trabajo $L(t)$ puede ser considerado de diferentes formas, por ejemplo, puede representar la población económicamente activa o el núme-

5 En la literatura sobre crecimiento económico es mas común encontrar el término capital natural.

ro de horas de trabajo que se pueden otorgar a la producción. Al igual que el capital físico, el trabajo también es productivo, ya que la incorporación de más trabajo implica un aumento en el nivel de producción. Sin embargo, el trabajo no es generado a través del proceso productivo; de hecho, en la mayor parte de los modelos de crecimiento se considera que el suministro de trabajo es independiente de las variables consideradas en los modelos.

El último factor a considerar, la tecnología $A(t)$, es mas dificil de describir, ya que involucra diversos procesos y existen diversas teorías acerca de cómo éstos se pueden modelar. A pesar de ello, se puede considerar a la tecnología como un factor que mejora la eficiencia de los factores de producción o incluso cambia la forma en que se combinan. En particular, este factor puede ser considerado como el motor del crecimiento económico de largo plazo, pues la tecnología permite superar las limitaciones que imponen los rendimientos decrecientes del capital y el trabajo.

1.3. La función de producción

La forma en que se modela la relación entre la producción y los factores productivos es a través de una función de producción. Esto es, una descripción matemática de cómo se relacionan los factores para dar lugar al proceso productivo. La forma general de las posibles funciones de producción ya ha sido descrita en (1); sin embargo, para fijar las ideas presentadas previamente podemos introducir los dos factores estándar que usualmente se consideran en los modelos de crecimiento. Considérese que la función de producción solo depende de los factores capital físico y trabajo:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \tag{6}$$

Si incorporamos las condiciones 1 y 2 en la función de producción (6) se obtienen los siguientes resultados:

$$F_K(K, L) = \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad F_L(K, L) = \frac{\partial F}{\partial L} > 0 \tag{7}$$

$$F_{KK}(K,L) = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad F_{LL}(K,L) = \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \tag{8}$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L) \tag{9}$$

Las condiciones (7), (8) y (9) implican que el capital y el trabajo muestran rendimientos decrecientes en la producción cuando actúan de forma independiente, pero constantes a escala cuando ambos factores aumentan en la misma proporción. Es en estas condiciones donde está codificada la rivalidad de uso del capital.

En adición a las condiciones 1 y 2 que la función de producción debe satisfacer, las siguientes condiciones límite son a menudo impuestas en el análisis del crecimiento económico para asegurar la existencia de estados estacionarios:[6]

Condición 3. *La función de producción F debe satisfacer*:

$$\lim_{K\to\infty} F_K(K,L) = 0, \quad \lim_{L\to\infty} F_L(K,L) = 0 \tag{10}$$

$$\lim_{K\to 0} F_K(K,L) = \infty, \quad \lim_{L\to 0} F_L(K,L) = \infty \tag{11}$$

$$F(0,L) = 0 \tag{12}$$

$$F(K,0) = 0 \tag{13}$$

La justificación económica de las condiciones (10) y (11) proviene de los datos empíricos observados. Los primeros incrementos de capital y de trabajo (cuando K y L son cercanos a cero) son altamente productivos; es decir, tienen un gran efecto en la producción, pero cuando ambos factores son suficientemente abundantes (cuando K y L son muy grandes), sus productos marginales son cercanos a cero. Las condiciones (12) y (13) establecen la necesidad del capital y el trabajo en el proceso productivo.[7]

6 El economista Ken-Ichi Inada fue el primero que enunció estas condiciones, por lo que a menudo se les conoce como las condiciones de Inada.

7 En ocasiones estos supuestos son relajados, especialmente en los modelos de crecimiento endógeno, donde a menudo no se considera indispensable la contribución del trabajo.

Las condiciones impuestas hasta ahora a la función de producción restringen en gran medida el número de funciones que pueden utilizarse, aunque se han construido funciones que satisfacen dichas condiciones, en especial la función de Cobb-Douglas:[8]

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{14}$$

Esta función es la más utilizada en los modelos de crecimiento económico, ya que, además de satisfacer las condiciones 1, 2 y 3, permite representar de forma sencilla el comportamiento de la producción.[9] El coeficiente (α) representa el grado de distribución del ingreso entre el capital y el trabajo. Un mayor α implica que la mayor parte del ingreso proveniente de la producción está dedicado al capital; ocurriría el efecto contrario si α disminuye.

2. Modelo de Solow-Swan

El modelo de Solow-Swan, nombrado así en honor a los economistas Robert Solow y Trevor Swan, fue presentado simultáneamente en dos artículos publicados en 1956.[10] Posteriormente, Solow y otros economistas han desarrollado y ampliado el modelo con el fin de proporcionar un marco analítico que permita modelar los factores que intervienen en la mecánica del crecimiento económico. Se puede considerar el modelo de Solow-Swan como uno de los iconos de la metodología moderna sobre crecimiento económico.

Antes de la construcción del modelo de Solow, las estrategias para estudiar el crecimiento económico estaban basadas en el modelo desarrollado por Roy Harrod y Evsey Domar. El modelo de Harrod-Do-

8 Esta función fue propuesta por el matemático Charles Cobb y el economista Paul Douglas en 1928.
9 Sin embargo, existe una discusión interesante acerca de la fundamentación microeconómica de la función y de su coherencia dimensional en las unidades de medida del capital y el trabajo. Véase Barnett (2004) y Baiocchi (2012).
10 Solow (1956) y Swan (1956).

mar enfatizaba los potenciales aspectos disfuncionales del crecimiento, por ejemplo, la existencia simultánea de crecimiento y desempleo. Sin embargo, el modelo de Solow-Swan pronto desplazó al modelo de Harrod-Domar porque sus características mostraron ser una base más sólida para la construcción de modelos más sofisticados que permitieran entender la mecánica del crecimiento. La esencia del modelo de Solow-Swan (a diferencia del modelo de Harrod-Domar) es la función de producción neoclásica. Dicha función permite relacionar el modelo de Solow-Swan con los fundamentos microeconómicos de la producción y también le permite ser un puente entre la teoría y los datos empíricos.

2.1. El modelo

El modelo está construido sobre los supuestos establecidos en la sección 1 más algunos otros. Es un modelo de economía cerrada sin participación gubernamental, en la cual existe un solo sector o mercado. Asimismo, en esta economía existe un único agente económico o familia representativa que posee unicamente dos factores de producción: capital físico ($K(t)$) y trabajo ($L(t)$).

La descripción matemática de cómo se combinan los factores de producción es proporcionada por la función de producción:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \tag{15}$$

Por otra parte, en el caso de una economía cerrada, los ingresos provenientes de la producción ($Y(t)$) se pueden desglosar en dos rubros, el consumo ($C(t)$) y la inversión ($I(t)$):

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{16}$$

El modelo considera que el agente ahorra una proporción fija de su ingreso (es decir, existe una tasa de ahorro constante (s), la cual se considera exógena al modelo). En una economía cerrada el ahorro es igual a la inversión, por lo tanto:

$$S(t) = sY(t) \tag{17}$$

$$I(t) = S(t) = sY(t) \tag{18}$$

Asimismo, la parte del ingreso que el agente dedica al consumo es:

$$C(t) = (1 - s)Y(t) \tag{19}$$

La acumulación de capital por parte del agente responde en primera instancia a dos factores: uno es a la inversión que se realiza para producir más capital, y el segundo es la depreciación o desgaste que sufre el capital. Se considera que el capital se deprecia a una tasa constante (δ), la cual también se considera exógena. Por lo tanto, la tasa de cambio del capital es igual a la inversión realizada para acumular capital menos la cantidad depreciada de capital, es decir:

$$\frac{dK}{dt} \equiv \dot{K} = I(t) - \delta K(t) \tag{20}$$

Sustituyendo la inversión en términos de la producción se obtiene la ecuación de evolución del capital:

$$\dot{K} = sY(t) - \delta K(t) = sF(K(t), L(t)) - \delta K(t) \tag{21}$$

Como la dotación de trabajo es inelástica, la cantidad que se incorpora en la producción solo depende del crecimiento poblacional. Como una primera aproximación se supone que el crecimiento de la población ocurre de forma exógena con una tasa constante de crecimiento (*n*):

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \tag{22}$$

Es importante señalar que si se quiere estudiar la evolución del capital, no es conveniente considerarla en términos absolutos, sino en términos de capital por trabajador, debido a que lo mensurable en los estudios empíricos son las diferencias en el capital y la producción normalizadas respecto de la población. Por lo tanto, se define una nueva variable, el capital per cápita:

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)}$$

De la anterior expresión se obtiene la relación:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - n \tag{23}$$

Reescribiendo:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{F(K(t), L(t))}{K(t)} - (n + \delta) \tag{24}$$

Por las propiedades que cumple la función de producción,[11] se puede definir una nueva función de producción que dependa solamente del capital per cápita:

$$y(t) \equiv \frac{F(K(t), L(t))}{L(t)} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k)$$

Donde $y(t)$ se interpreta como la producción per cápita. Sustituyendo la nueva definición de la función de producción en la ecuación (24) se obtiene la ecuación fundamental del modelo Solow-Swan:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - (n + \delta) \tag{25}$$

Las soluciones de la ecuación fundamental de Solow-Swan depende de los parámetros s, n, δ y de la elección de la función de producción $f(k(t))$. Al resolver (25) se estarán determinando las trayectorias del capital per cápita y por ende la evolución de la producción per cápita.

11 Ver Condición 2.

La ecuación (25) no se puede resolver de forma explícita si no se especifica la función de producción per cápita. Aunque se pueden estudiar algunas propiedades de la ecuación al analizar sus puntos de equilibrio o estados estacionarios. Mediante la definición de punto de equilibrio tenemos que, para el modelo Solow-Swan, existen solo dos puntos de equilibrio:

$$k^* = 0 \tag{26}$$

$$k^* = \frac{sf(k^*)}{n+\delta} \tag{27}$$

El primer punto de equilibrio carece de importancia económica ya que suponemos que las condiciones iniciales del capital per cápita son siempre positivas ($k(0) > 0$). Para el segundo punto de equilibrio tenemos las siguientes proposiciones:[12]

Proposición 3.1 *Suponiendo que las condiciones 1 y 3 se cumplan, entonces el modelo de Solow-Swan tiene un solo estado estacionario donde la producción per cápita está dada por*:

$$y^* = f(k^*)$$

y el estado estacionario del capital per cápita satisface (*27*). *Asimismo, el consumo per cápita en el estado estacionario del agente representativo está dado por:*

$$c^* = (1-s)f(k^*)$$

Proposición 3.2 *El punto de equilibrio descrito por* (*27*) *tiene una estabilidad asintótica global. Para cualquier* $k(0) > 0$ *la trayectoria del capital per cápita* $k(t)$ *converge monotónicamente a* k^*.

La primera proposición indica que en el modelo existe un posible y unico estado estacionario, tanto para el capital como para la produc-

12 Acemoglu (2009: 39-40)

ción. El valor de este estado depende en última ínstancia de las tasas de ahorro, del crecimiento poblacional y de la depreciación del capital.

La segunda proposición sobre el tipo de estabilidad del punto de equilibrio implica que la evolución del capital per cápita es convergente en el largo plazo al estado estacionario determinado por k*, independientemente de cuáles hayan sido las condiciones iniciales de las que se haya partido.

El análisis de los puntos de equilibrio del modelo Solow-Swan nos ha proporcionado la información necesaria sobre el comportamiento dinámico de la producción y del capital. Con el fin de clarificar los resultados obtenidos podemos estudiar de forma explícita las soluciones de la ecuación (25). Para resolver de forma explícita la ecuación fundamental de Solow-Swan se necesita especificar cual es la función de producción. Introducimos la función de producción de Cobb-Douglas:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} \tag{28}$$

Al utilizar las propiedades de homogeneidad de la función de producción podemos reescribir (28) como:

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} = k(t)^{\alpha} \tag{29}$$

Sustituimos (29) en la ecuacion fundamental de Solow-Swan:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{k(t)^{\alpha}}{k(t)} - (n+\delta) \tag{30}$$

Reescribiendo:

$$\dot{k}(t) + (n+\delta)k(t) = sk(t)^{\alpha} \tag{31}$$

La ecuación (31) es una ecuación de Bernoulli, y puede ser resuelta al realizar un cambio de variable que transforme (31) en una ecuación diferencial lineal.[13] Por lo tanto, las trayectorias solución del modelo Solow-Swan están dadas por:

$$k(t) = \left(\frac{s}{n+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta} \right) e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{32}$$

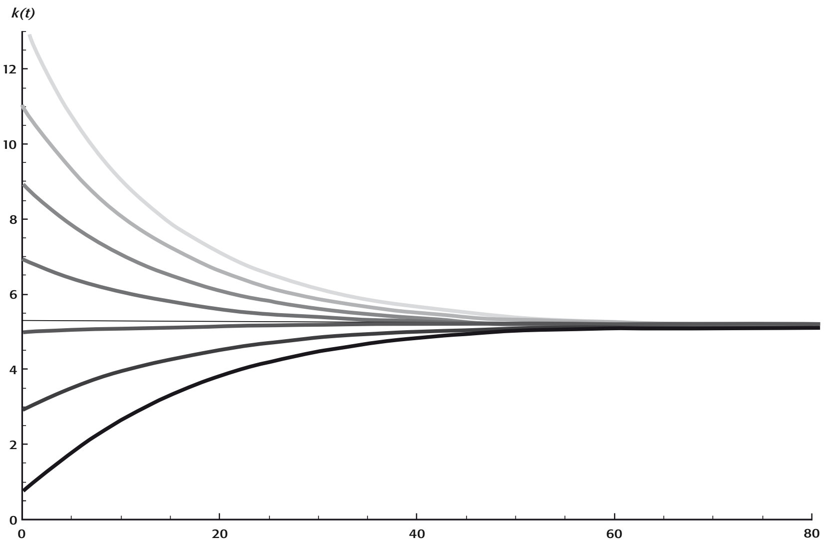

Figura 1: Soluciones a la ecuación de Solow-Swan con distintos niveles de capital inicial, considerando los parámetros $\alpha = {}^1/_3$, n =0,1, δ =0,1y s =0,3

Algunas trayectorias solución de la ecuación (31) para distintos valores iniciales de capital per cápita (k_0) se muestran en la figura 1. Se observa que, independientemente del nivel inicial de capital per cápita, la evolución del capital tiene un comportamiento convergente al estado

13 Ver anexo

estacionario, lo cual concuerda con el análisis previo de la estabilidad del punto de equilibrio.

La diferencia entre los puntos de partida k_0 y el estado estacionario k^* está relacionada con el exponente $(1 - \alpha)(n + \delta)$. El cierre de la brecha (es decir, la convergencia hacia el estado estacionario) será más lento para aquellas trayectorias que tengan un α, n y δ mayores comparadas con las que tengan valores menores en dichas constantes.

2.2. Resultados del modelo

Una característica importante del modelo Solow-Swan, que comparte con muchos modelos de crecimiento, es que constituye una representación simple pero abstracta de un fenómeno complejo; ya que si se quiere considerar de forma realista el proceso de crecimiento económico se debe tomar en cuenta: que los hogares y los individuos tienen diferentes gustos, habilidades, ingresos, preferencias y roles en la sociedad; que existen varios sectores económicos; que hay múltiples interacciones sociales, y que también se presentan múltiples fenómenos no económicos que influyen en el crecimiento. Ante esa complejidad que lo rebasa, el modelo de Solow evita las complicaciones al construir una idealización con una economía de un solo bien y sin considerar de forma extensa las decisiones y preferencias individuales.

No obstante, si se observa el modelo desde una perspectiva actual, se apreciará la relevancia que ha tenido en el desarrollo de las teorías del crecimiento económico. A pesar de que el modelo ofrece un marco simple sobre los factores que intervienen en la mecánica del crecimiento económico, los resultados del modelo son importantes.

En primer lugar, bajo las condiciones y suposiciones hechas en el modelo, se ha mostrado cuál es el efecto de la acumulación de capital en el crecimiento económico. En los estados iniciales, la acumulación de capital lleva a un crecimiento de la producción; sin embargo, en el largo plazo, la acumulación de capital se detiene y la producción alcanza un estado estacionario o de equilibrio. Es decir, las tasas de crecimiento son nulas. Dicho estado estacionario está determinado sólo por la magnitud de las tasas de ahorro, del crecimiento poblacional y de la depreciación del capital.

En segundo lugar, se ha mostrado cuáles son los efectos que tienen los cambios en las tasas de ahorro, el crecimiento poblacional y la depreciación. Los incrementos de la tasa de ahorro tienen un efecto positivo en el nivel de producción ya que permiten un mayor nivel de inversión y, por lo tanto, un mayor nivel final de capital per cápita. En cambio, incrementos en la tasa de crecimiento de la población o de la tasa de depreciación del capital tienen un efecto negativo, ya que el aumento de dichas tasas diluye la razón capital por unidad de trabajo. Por lo tanto, en este caso, la producción alcanza un nivel menor en el estado estacionario.

Finalmente, los resultados del modelo indican que la acumulación de capital no puede generar por sí sola un crecimiento económico sostenido, ya que el modelo predice que en el largo plazo hay tasas nulas de crecimiento. De manera que el crecimiento económico se explica por otro tipo de factores que no están contemplados en el modelo. Por ejemplo, las tasas de ahorro, el crecimiento poblacional y la depreciación no están explicadas, ésto ocasiona que el comportamiento dinámico del modelo esté determinado por esas variables exógenas. Asimismo, como el modelo no contempla en ningún momento las preferencias de consumo del agente representativo, las trayectorias de consumo, ahorro y producción no se pueden considerar óptimas en un sentido de maximización de la utilidad.

Por lo tanto, el modelo de Solow debe ser visto, más que nada, como un punto de partida hacia modelos más complejos. Es decir, a pesar de sus limitaciones, su estructura le permite ser la base de modelos mucho mas realistas que consideran otros factores u otros tipos de modelado.

3. Modificaciones y ampliaciones más importantes al modelo de Solow-Swan

Debido a que la cantidad de modificaciones y ampliaciones que se han efectuado al modelo de Solow-Swan son numerosas, en esta sección sólo analizamos algunas de las principales. La selección se fundamenta en una revisión exhaustiva de los principales modelos de crecimiento existentes y en los objetivos de nuestra agenda de investigación de largo plazo.

3.1. Modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico

Una de las principales limitaciones del modelo de Solow-Swan es su incapacidad de explicar cuáles son los mecanismos que ocasionan un crecimiento económico sostenido en el largo plazo. Una de las principales propuestas para corregir dicha falla es la incorporación del nivel de tecnología en el proceso de producción. Solow consideró que el nivel de tecnología puede ser incorporado de la siguiente forma:[14]

$$Y(t) = AF(K(t), L(t))$$

Donde el nivel de tecnología funciona como un multiplicador de la producción que se considera siempre creciente ($A > 0$). Esto ocasiona que incrementos del nivel de tecnología A tengan un efecto positivo en el estado estacionario de la producción per cápita. Entre mayor sea el nivel de tecnología, mayor será el nivel de producción en el largo plazo.

Aunque esta propuesta concilia el modelo Solow-Swan con el fenómeno de tasas de crecimiento per cápita positivas, no es del todo satisfactoria, pues no explica por qué la tecnología debería afectar de esta forma a la producción. Asimismo, supone que la tecnología no tiene una evolución temporal, es decir, solo ocurren mejoras en el nivel tecnológico en forma de saltos

14 Solow (1956).

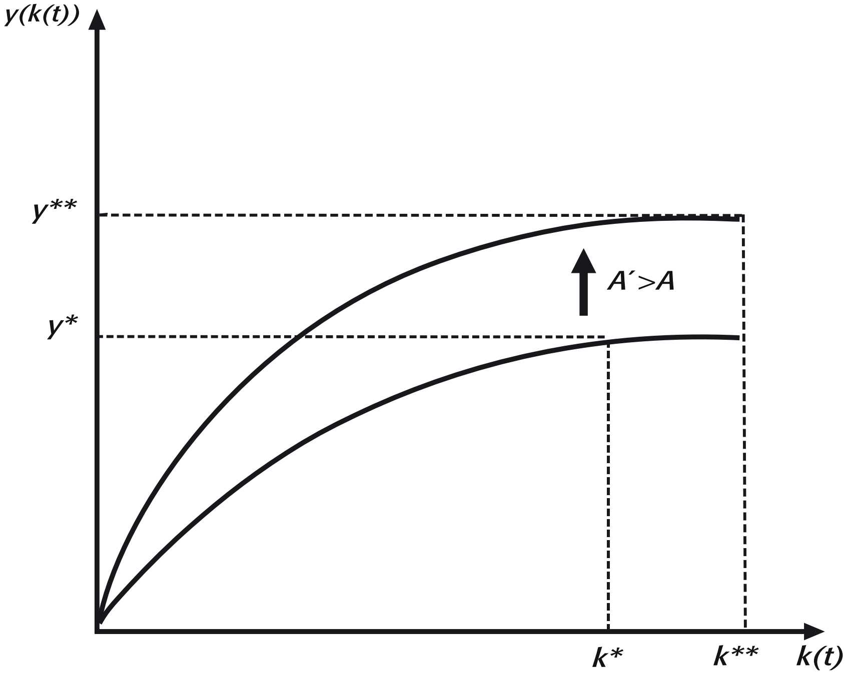

Figura 2: Cambio del estado estacionario y* al estado y** ocasionado por un aumento en el nivel de tecnología $A' > A$

recurrentes. Una propuesta más realista sería pensar la tecnología como un proceso evolutivo. Considerar al progreso tecnológico y no al nivel de tecnología actual como el motor del crecimiento económico.

Una forma de modelar el progreso tecnológico es introducir una variación temporal en el factor tecnología ($A \longrightarrow A(t)$) y relacionar dicha variación con el mejoramiento de la eficiencia de alguno de los factores de producción. Pero la cuestión de cómo introducir el progreso tecnológico no es tan sencilla.

El progreso tecnológico puede adoptar diversas formas. Ciertos avances tecnológicos pueden permitir a los productores obtener un mayor nivel de producción utilizando una cantidad relativamente igual de capital o trabajo. En ese caso se pueden distinguir dos modalidades de progreso tecnológico: como ahorrador de capital o como ahorrador de trabajo (es decir, aumenta la eficiencia del capital o del trabajo). También puede existir la situación en la que el progreso tecnológico no produzca un ahorro relativo en ninguno de los factores de producción, en este caso se podría hablar de progreso tecnológico neutral.[15]

Los estudios de Hicks, Harrod y Usawa han mostrado ciertas restricciones que debe tener la participación del progreso tecnológico en la producción.[16] En particular, Usawa mostró que la tecnología debía aumentar la eficiencia en el trabajo si se quiere conservar el uso de modelos que tengan estados estacionarios. También demostró que al usar funciones de producción tipo Cobb-Douglas, el progreso tecnológico solo tenía congruencia dentro del modelo de mercados competitivos cuando mejoraba la eficiencia del trabajo.[17]

Por consiguiente, una primera propuesta para introducir el progreso tecnológico es la siguiente. Considérese una función de producción con la siguiente estructura:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$$

La sinergia entre los factores trabajo y tecnología $A(t)L(t)$ se denomina trabajo efectivo. Supongamos que el progreso tecnológico ocurre a una

15 Barro y Sala-i-Martin, (2009: 52).
16 Barro y Sala-i-Martin (2009: 52).
17 Para los argumentos y un esbozo de la demostración realizada por Usawa, ver Acemoglu (2009: 58-61).

tasa constante $g > 0$, la cual es en este caso independiente de los factores considerados en el modelo.[18] Por lo tanto:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g$$

Se introduce la nueva función de producción siguiendo la misma metodología que en el modelo de Solow-Swan. La acumulación de capital está entonces determinada por:

$$\dot{K}(t) = sF(K(t), A(t)L(t)) - \delta K(t) \tag{33}$$

Se definen las variables normalizadas respecto de la población. A la variable (K(t)) la denominamos capital efectivo:

$$\mathcal{K}(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{34}$$

y a Y como la producción efectiva:

$$\mathcal{Y}(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} \tag{35}$$

Al derivar (34) respecto del tiempo y dividiendo entre sí misma, se obtiene la relación:

$$\frac{\dot{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{36}$$

18 Existen otros modelos que tratan de endogenizar la tasa de progreso tecnológico al considerar otros tipos de funciones de producción, ver Acemoglu (2002).

Al igual que antes, se asume que la población crece a una tasa constante n. Por lo tanto, después de incorporar las tasas de progreso tecnológico y de crecimiento poblacional se obtiene:

$$\frac{\dot{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n \tag{37}$$

Introduciendo (33) en la ecuación (37) se obtiene:

$$\frac{\dot{\mathcal{K}}}{\mathcal{K}} = \frac{sF(K(t), A(t)L(t))}{K(t)} - (\delta + g + n) = \frac{sf(\mathcal{K})}{\mathcal{K}(t)} - (\delta + g + n) \tag{38}$$

Por lo tanto, bajo las consideraciones hechas con el modelo Solow-Swan y tomando en cuenta la participación del progreso tecnológico en el trabajo se obtiene la ecuación de Solow-Swan con progreso tecnológico:

$$\dot{\mathcal{K}} = sf(\mathcal{K}) - (\delta + g + n)\mathcal{K} \tag{39}$$

La estructura de la ecuación (39) es la misma que la ecuación fundamental de Solow-Swan (25); la única diferencia es la presencia de la tasa de progreso tecnológico g. Esta similitud en la estructura conlleva a que los resultados encontrados en el primer modelo de Solow-Swan se mantengan.

Proposición 4.1 *Suponiendo que las condiciones 1 y 3 se cumplan y considerando un tipo de tecnología neutral según Harrod, entonces el modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico a la tasa constante g tiene un solo estado estacionario determinado por:*

$$\mathcal{K}^* = \frac{sf(\mathcal{K}^*)}{\delta + g + n}$$

Proposición 4.2 *El punto de equilibrio descrito por K* tiene una estabilidad asintótica global; es decir, para cualquier K(0) > 0 la trayectoria del capital efectivo K(t) converge monotónicamente a K*.*

Proposición 4.3 *En el estado estacionario, el capital, la producción y el consumo per cápita* $(k(t), y(t), c(t))$ *crecen a la misma tasa que el progreso tecnológico.*

La proposición 4.3 destaca que en este modelo, y en general en los modelos que incorporan el progreso tecnológico, los resultados no conducen a un estado estacionario donde la renta per cápita es constante, sino a una trayectoria de crecimiento balanceado, donde la producción per cápita crece a una tasa constante, mientras que las variables transformadas $(K(t), Y(t))$ permanecen constantes.

La incorporación del progreso tecnológico al modelo Solow-Swan genera un mecanismo de crecimiento económico sostenido, el cual está determinado por la tasa de progreso tecnológico. Sin embargo, el punto débil del modelo radica precisamente en que la tasa de crecimiento queda determinada en su totalidad por un único elemento, el cual no está explicado por el modelo. Es necesario introducir una teoría del cambio tecnológico dentro del marco neoclásico del crecimiento económico para obtener un modelo más satisfactorio; sin embargo, es complicado introducir esta teoría ya que intervienen en ella múltiples factores. Por ejemplo, la aleatoriedad de los descubrimientos científicos, el efecto de los incentivos económicos, las diferentes estructuras de mercado, las actuaciones del Estado, entre otros factores, afectan el proceso de investigación y desarrollo del cual depende el progreso tecnológico.

3.2. Modelo de Solow-Swan con funciones tipo AK

Gran parte de la investigación moderna sobre el crecimiento económico trata de explicar los factores que determinan el crecimiento dentro de los mismos modelos, sin recurrir a variables explicativas exógenas. Esta corriente de investigación se conoce como teoría de crecimiento endógeno.

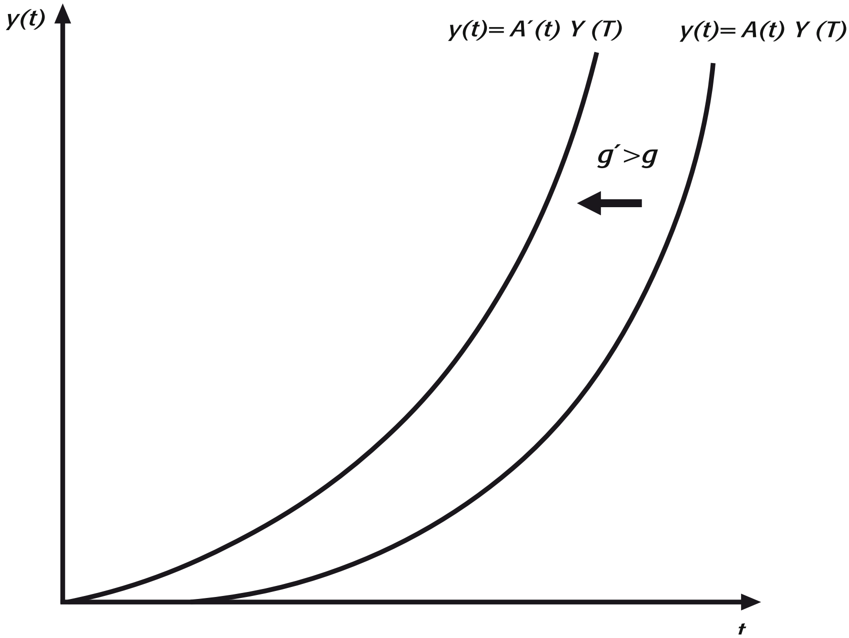

Figura 3, Efectos de un aumento de la tasa de progreso tecnológico (g‘ >g) en la producción per cápita.

Los primeros estudios realizados en dicha dirección son los de Romer[19] y Lucas.[20] El enfoque propuesto por ellos estaba fundamentado en un concepto amplio de capital, el cual no necesitaba forzosamente de rendimientos decrecientes conforme la economía se desarrollaba. Esta relajación de los supuestos de la teoría neoclásica permite mantener el crecimiento de forma indefinida sin hacer explícita la participación del progreso tecnológico.

19 Romer (1986).
20 Lucas (1988).

Uno de los primeros modelos de crecimiento endógeno es el llamado modelo AK, el cual puede ser establecido como un caso especial del modelo Solow-Swan. El modelo AK recibe su nombre por la estructura que se considera para la función de producción:

$$F(K(t), L(t), A(t)) = AK(t) \tag{40}$$

Donde A es una constante positiva que corresponde al nivel de tecnología y $K(t)$ representa el capital en una interpretación mas amplia.[21] La ecuación (40) tiene importantes diferencias respecto de las funciones de producción que satisfacen las condiciones 1 y 3. Una de ellas indica que la producción es solo una función del capital en la que no existen rendimientos decrecientes. Otra es la incompatibilidad con las condiciones de Inada, las cuales ya no son satisfechas. Esta diferencia en particular es esencial para el crecimiento sostenido.

Usando las definiciones de capital y producción per cápita, introducimos (40) en la ecuación fundamental de Solow-Swan (25):

$$\dot{k}(t) = sAk(t) - (n+\delta)k(t) = (sA - n - \delta)k(t) \tag{41}$$

Por lo tanto, de la ecuación (41) se obtienen los siguientes resultados:

Proposición 4.4 *Si se considera el modelo de Solow-Swan con la función de producción* (*40*) *y suponiendo que los parámetros satisfacen la condición:*

$$sA - n - \delta > 0$$

entonces existe una trayectoria de crecimiento balanceado en la cual el capital, la producción y el consumo per cápita crecen a una tasa constante determinada por $(sA - n - \delta)$.

21 Claramente este es una caso límite de la función Cobb-Douglas cuando $\alpha \rightarrow 1$

Proposición 4.5 *Las trayectorias de equilibrio de* (*41*) *para el capital y la producción per cápita estan dadas por:*

$$k(t) = k_0 e^{(sA-\delta-n)t}$$

$$y(t) = Ak_0 e^{(sA-\delta-n)t}$$

Las anteriores proposiciones establecen la posibilidad de un crecimiento económico sostenido sin la necesidad de una dinámica de transición hacia un estado estacionario. Asimismo, la tasa de crecimiento es independiente de la tasa de progreso tecnológico; aunque depende del nivel de ahorro, de la tecnología y de las tasas de crecimiento de la población y de la depreciación.

Aunque este primer modelo de crecimiento endógeno establece la posibilidad de un crecimiento sostenible cuando la función de producción adquiere la estructura (40), ésta es un caso límite de las funciones tipo Cobb-Douglas. El principal problema con este caso límite es considerar que la participación del capital en el ingreso es uno (o muy cercano a uno). Los supuestos del modelo no coinciden con los datos observados sobre la participación de los factores de producción en el ingreso nacional.[22]

Además, la estructura de las funciones de producción tipo AK generalmente impiden que el modelo genere algún tipo de convergencia, a diferencia de los modelos con progreso tecnológico, ya que los rendimientos constantes del capital ocasionan que el producto marginal del capital permanezca constante. Este fallo puede sortearse, en algunos casos, al introducir combinaciones de funciones AK con funciones Cobb-Douglas.[23]

22 Uno de los primeros trabajos sobre este asunto lo realizó Kaldor (1957).
23 Barro y Sala-i-Martin (2009: 66-68).

Otro aspecto que no contempla el modelo AK es el progreso tecnológico, al suponer que A funciona como un multiplicador, al igual que en el primer intento propuesto por Solow. Esa puede ser la principal falla de este modelo de crecimiento endógeno, ya que cualquier modelo que no intente considerar el progreso tecnológico estará fallando en capturar la esencia de un aspecto fundamental del crecimiento económico. Modelos posteriores han tratado de corregir esta debilidad al introducir una dependencia explícita del progreso tecnológico con la propiedad de rendimientos constantes del capital.

3.3. Modelo de Solow-Swan con capital humano

Otra de las ampliaciones hechas al modelo de Solow-Swan es la inclusión del concepto de capital humano. Mankiew, Romer y Weil (1992) introdujeron el concepto de capital humano en el marco del modelo de Solow-Swan para incorporar las diferencias de calidad entre los trabajadores y, de esta forma, poder dar una explicación más certera de las diferencias de ingreso observadas entre los países.

El capital humano es un concepto que representa el conjunto de habilidades, educación, salud y otros características relacionadas con la productividad de los trabajadores. Este concepto se origina de la observación de que los individuos invierten en la mejora de sus habilidades y competencias laborales, de la misma forma que las empresas invierten en su capital físico para incrementar su productividad. Asimismo, el capital humano también puede ser considerado como cualidades que son producidas, por ende es necesario invertir una parte del ingreso.

Una forma de incorporar la participación del capital humano en el modelo de Solow-Swan es a través de una función de producción que dependa de tres factores: capital físico, capital humano y trabajo efectivo.

$$Y = F(K, H, AL) \tag{42}$$

Donde H denota el capital humano. En este caso, se considera que la tecnología es neutral y la función de producción sigue satisfaciendo las condiciones 1, 2 y 3.

En esta primera incorporación del capital humano se propone que la inversión realizada en ese factor toma una forma similar a la inversión realizada en capital físico. Por lo tanto, el agente ahorra una fracción s_K de su ingreso para invertir en capital físico y una fracción s_H para invertir en capital humano.

Al igual que el físico, el capital humano también se deprecia a una tasa constante. Denotamos las tasas de depreciación del capital físico y humano por δ_K y δ_H respectivamente.

Consideremos nuevamente que las tasas de crecimiento de la población y de progreso tecnológico son constantes. Definimos las variables capital físico efectivo, capital humano efectivo y producción efectiva:

$$\mathcal{K}(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$$

$$\mathcal{H}(t) \equiv \frac{H(t)}{A(t)L(t)}$$

$$\mathcal{Y}(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = f(\mathcal{K}(t), \mathcal{H}(t))$$

Siguiendo la misma metodología que en los casos anteriores, se obtienen las ecuaciones de movimiento para $K(t)$ y $H(t)$:

$$\dot{\mathcal{K}}(t) = s_{\mathcal{K}} f(\mathcal{K}(t), \mathcal{H}(t)) - (\delta_{\mathcal{K}} + g + n)\mathcal{K}(t) \quad (43)$$

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = s_{\mathcal{H}} f(\mathcal{K}(t), \mathcal{H}(t)) - (\delta_{\mathcal{H}} + g + n)\mathcal{H}(t) \quad (44)$$

El análisis de los puntos de equilibrio del modelo Solow-Swan con capital humano lleva a las siguientes proposiciones:

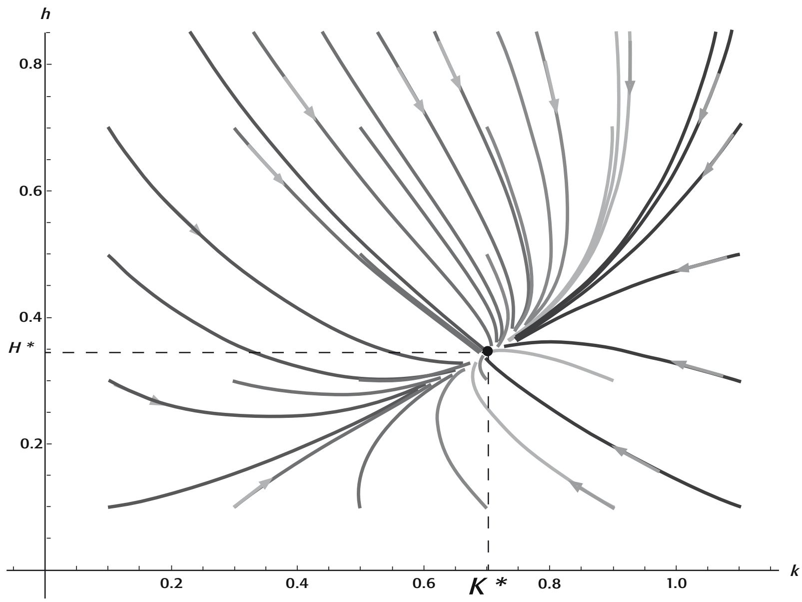

Figura 4. Plano fase del modelo de Solow-Swan con capital humano. La dirección de las trayectorias confirma la existencia de un solo estado estacionario (K^* , H^*), el cual es un atractor.

Proposición 4.6 *Considerando la participación del capital humano en el modelo de Solow-Swan a través de la función de producción* (*42*), *entonces existe un solo estado estacionario* (K^* , H^*) *determinado por:*

$$\mathcal{K}^* = \frac{s_{\mathcal{K}} f(\mathcal{K}^*, \mathcal{H}^*)}{\delta_{\mathcal{K}} + g + n}$$

$$\mathcal{H}^* = \frac{s_{\mathcal{H}} f(\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^*)}{\delta_{\mathcal{H}} + g + n}$$

Proposición 4.7 *El estado estacionario descrito por* (K^* , H^*) *tiene una estabilidad asintótica global. Para cualquier* $K(0) > 0$ *y* $H(0) > 0$ *las trayectorias del capital f'ısico efectivo* $K(t)$ *y del capital humano efectivo* $H(t)$ *convergen monotónicamente a* (K^* , H^*).

Estos resultados muestran que la incorporación del capital humano en el modelo de Solow-Swan no interfiere con sus propiedades básicas. La existencia de un estado estacionario permanece asegurada. La convergencia también se mantiene, solo que ahora está determinada por la participación relativa del capital físico (α)y del capital humano (β) en el ingreso. Asimismo, se mantiene que la tasa de crecimiento de la producción per cápita está determinada sólo por la tasa de progreso tecnológico.

Se pueden encontrar de forma explícita los puntos de equilibrio (K^* , H^*) al especificar la función de producción. Nuevamente, una elección adecuada es una función tipo Cobb-Douglas:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} (A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta}$$

Donde, en este caso, los coeficientes de participación en el ingreso satisfacen las condiciones: $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ y$(\alpha + \beta) < 1$. Por lo tanto, la producción efectiva está dada por:

$$\mathcal{Y}(t) = \mathcal{K}(t)^{\alpha} \mathcal{H}(t)^{\beta} \tag{45}$$

Al sustituir la ecuación (45) en los puntos de equilibrio (K^* , H^*) se obtienen las expresiones explícitas del estado estacionario:[24]

$$\mathcal{K}^* = \left(\left(\frac{s_{\mathcal{K}}}{n + g + \delta_{\mathcal{K}}} \right)^{1-\beta} \left(\frac{s_{\mathcal{H}}}{n + g + \delta_{\mathcal{H}}} \right)^{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \tag{46}$$

$$\mathcal{H}^* = \left(\left(\frac{s_{\mathcal{K}}}{n + g + \delta_{\mathcal{K}}} \right)^{\alpha} \left(\frac{s_{\mathcal{H}}}{n + g + \delta_{\mathcal{H}}} \right)^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \tag{47}$$

24 Ver anexo.

Por lo tanto, sustituyendo (46) y (47) en la función de producción efectiva (45) se obtiene el nivel estacionario de la producción efectiva:

$$\mathcal{Y}^* = \left(\frac{s_{\mathcal{K}}}{n+g+\delta_{\mathcal{K}}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_{\mathcal{H}}}{n+g+\delta_{\mathcal{H}}}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{48}$$

Las ecuaciones (46) y (47) muestran que una mayor tasa de ahorro dedicada al capital físico no solo incrementa su estado estacionario (K^*), sino también incrementa el del capital humano (H^*). Es decir, una elevación de la tasa de ahorro s_K tiene un efecto positivo sobre el estado estacionario del capital físico efectivo y, por consiguiente, en la producción. Este incremento de la producción podría incrementar la cantidad invertida en capital humano a pesar de que la tasa de ahorro s_H sea constante. El mismo efecto ocurre para el caso de una elevación de la tasa de ahorro s_H.

Asimismo, la ecuación (48) muestra que las contribuciones relativas de las tasas de ahorro del capital físico y del capital humano en la producción dependen del grado de participación del capital físico y del capital humano; es decir, de los coeficientes α y β. Cuanto más grande sea la participación del capital físico (α), mayor será el efecto de s_K en el nivel estacionario de la producción. De igual forma, cuanto más grande sea la participación del capital humano (β), el efecto de s_H será mayor.

3.4. Modelo de Solow-Swan con mejoras en el modelado de la población

Las anteriores modificaciones al modelo de Solow-Swan se enfocan principalmente en la introducción de nuevos factores en el proceso de producción. No obstante, también se han estudiado otros aspectos del modelo, en particular el relacionado con la dinámica del crecimiento de la población. Hemos identificado un gran número de modificaciones hechas en este ambito al modelo de Solow-Swan, pero para los propósitos de esta sección solo describiremos una en particular y mencionaremos, de forma muy breve, otras referencias para el lector interesado.

En los anteriores ejemplos siempre se ha considerado que la tasa de crecimiento de la población es constante en el tiempo:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \tag{49}$$

Este tipo de crecimiento exponencial o malthusiano[25] puede ser adecuado para modelar el crecimiento de ciertos tipos de poblaciones; sin embargo, existen evidencias de que las poblaciones humanas no crecen de forma indefinida. La competencia por los recursos naturales, los fenómenos climatológicos, las enfermedades u otros factores externos afectan el crecimiento de las poblaciones; en algunas ocasiones lo aceleran, y en otras ocasiones lo ralentizan. Se han propuesto una multitud de modelos con intención de representar de forma más realista la dinámica de las poblaciones. Verhulst[26] propuso uno de los primeros modelos de crecimiento poblacional de tipo no exponencial:

$$\dot{L}(t) = L(t)\Big(n - \frac{n}{S}L(t)\Big) \tag{50}$$

O reescribiendo la anterior ecuación con otros símbolos para las constantes:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n - bL(t) \tag{51}$$

La ecuación (51) se conoce como la ecuación de Verhulst o ecuación logística. Este modelo de crecimiento de población se diferencia de (49) al imponer un nivel o techo máximo para el crecimiento de la población, el cual está representado por el coeficiente de soporte del entorno (*S*).

25 Thomas Malthus fue el primero que propuso que la población humana crecía de forma exponencial.
26 Pierre François Verhulst, médico y matemático belga, propuso su modelo de población en 1845.

La incorporación de la ecuación logística al modelo de Solow-Swan ha sido realizada por Scarpello y Ritelli (2003). Esta adición junto con la elección de una función de producción tipo Cobb-Douglas tiene como resultado la modificación de la ecuación fundamental de Solow-Swan (31) en la siguiente expresión:

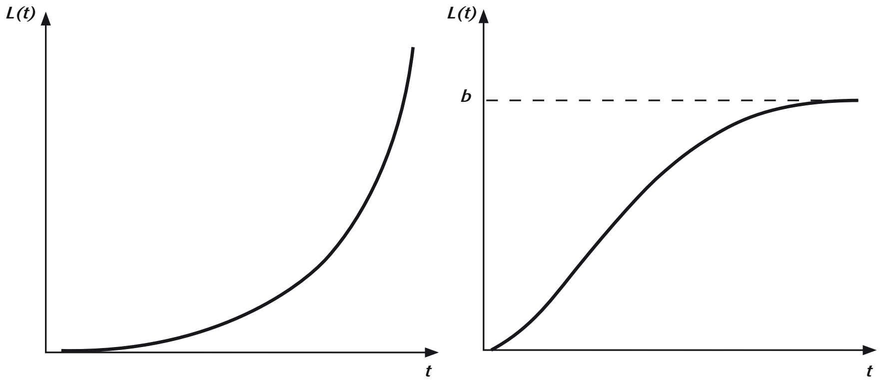

Figura 5. Comparación entre un modelo de crecimiento exponencial (a) y un modelo de crecimiento tipo logístico (b)

$$\dot{k}(t) + (\nu(t) + \delta)k(t) = Ask(t)^{\alpha} \tag{52}$$

Donde:

$$\nu(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{n(n - bL_0)}{n + b(e^{nt} - 1)L_0} \tag{53}$$

De la ecuación (53) se puede recuperar el caso malthusiano cuando el coeficiente de soporte tiende a cero, es decir, cuando b $\rightarrow$ 0. En este sentido, también se puede interpretar a la ecuación (49) como un caso especial de la ecuación logística. La solución del modelo Solow-Swan con la incorporación de la ecuación logística es mas difícil de obtener, ya que se tiene que recurrir al manejo de funciones especiales de la física-matemática para poder resolver el sistema formado por (52) y (53).[27]

Sin embargo, el análisis hecho por Scarpello y Ritelli ha mostrado que los resultados del modelo Solow-Swan se mantienen. Aunque la dinámica obtenida para el capital y la producción puede considerarse más general respecto de la obtenida con el modelo de crecimiento exponencial, los resultados indican que sigue estando asegurada la existencia de un estado estacionario para el capital y la producción per cápita.

Existen otros estudios que involucran otros modelos de población, por ejemplo, se han introducido modelos que tratan de endogenizar la tasa de crecimiento de la población al suponer una relación con la producción y la tasa de progreso tecnológico,[28] se ha incorporado el fenómeno de los movimientos migratorios[29] y los efectos que tiene dicho fenómeno en la productividad, y se han estudiado, por medio del modelo de Solow-Swan, las consecuencias que tiene la transición demográfica de las poblaciones en el crecimiento económico de largo plazo.[30] La introducción de los anteriores factores y su relación con el crecimiento económico aún son objeto de investigación.

3.5. Modelo de Solow-Swan con contaminación

El papel que juega el crecimiento económico en el deterioro del medio ambiente es un asunto que ha tomado importancia, especialmente dentro del campo de la economía del desarrollo sustentable. La literatura sobre dicho tema es amplia e involucra multiples metodologías de investigación; no obstante, una de ellas está relacionada íntimamente con los modelos de crecimiento que hemos analizado.

27 Scarpello y Ritelli (2003).
28 Guerrini (2005).
29 Barro y Sala-i-Martin (2009: 383-392).
30 Cai (2012).

En el trabajo de Brock y Taylor (2009) se analiza una variación del modelo de Solow-Swan, en la cual se incorporan los efectos de la contaminación como un producto no deseado pero siempre presente de la producción. La hipótesis central de su modelo es que el progreso tecnológico tiene un efecto moderador en los niveles de contaminación, es decir, conforme la economía crece, la calidad del medio ambiente mejora.

Brock y Taylor consideran que existe un factor de reducción de la contaminación (R), el cual es exclusivamente una función del nivel presente de producción (F) y de los esfuerzos de la economía para reducir la contaminación (F^R), por lo tanto:

$$R = R(F, F^R) \tag{54}$$

Asismismo, suponen que cada unidad de producción produce Ω unidades de contaminación. Por lo tanto, el nivel de contaminación presente es igual a las unidades de contaminación producidas menos la unidades de contaminación removidas por el factor de reducción:

$$E = \Omega F - \Omega R(F, F^R) \tag{55}$$

Si el factor de reducción cumple algunas de las propiedades de las funciones de producción, en especial la condición 3, entonces el nivel de contaminación presente se reescribe como:

$$E = \Omega F a(\theta) \tag{56}$$

Donde:

$$a(\theta) = [1 - A(1, \frac{F^R}{F})], \quad \theta = \frac{F^R}{F}$$

El término θ es la fracción de la actividad económica dedicada a la reducción de la contaminación, el cual satisface las propiedades de una función cóncava, es decir, $a'(\theta) < 0$ y $a''(\theta) > 0$.

Para combinar el modelo de Solow-Swan con sus consideraciones sobre el nivel de contaminación, Brock y Taylor suponen que la producción disponible para el consumo o la inversión es la siguiente:

$$Y = [1-\theta]F \tag{57}$$

Por lo tanto, transformando a variables per cápita e incorporando la ecuación fundamental de Solow-Swan se obtiene:

$$y = [1-\theta]f \tag{58}$$

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g)k \tag{59}$$

$$e = \Omega f(k) a(\theta) \tag{60}$$

El análisis de las anteriores tres ecuaciones es muy similar al análisis que se ha realizado en el modelo de Solow-Swan con progreso tecnológico, pero ahora está incorporado el nivel de contaminación per cápita (e).

No continuamos con el desarrollo de este modelo ya que el espacio no nos permite dar una explicación suficientemente amplia del mismo. No obstante, el objetivo de esta sección solo era mostrar cómo el modelo de Solow-Swan es usado actualmente para estudiar la relación entre el crecimiento económico y el deterioro ambiental.

4. Validación econométrica del modelo de Solow-Swan y de sus ampliaciones

La predicción fundamental del modelo de Solow-Swan es la convergencia condicional. Cuanto menor sea el nivel inicial de PIB per cápita en relación al estado estacionario, mayor será la tasa de crecimiento. Esta propiedad surge del supuesto de rendimientos decrecientes del capital: aquellas economías que disponen de menos capital por trabajador (en relación a su capital por trabajador a largo plazo) tienden a lograr tasas de rentabilidad y crecimiento más elevadas. La convergencia es condicional porque en el modelo de Solow-Swan los niveles correspondientes al estado estacionario del capital y la producción por trabajador dependen de la tasa de ahorro, de la tasa de crecimiento demográfico y de la posición de la función de producción, variables que pueden diferir entre las distintas economías. En consecuencia, el concepto de convergencia condicional, una propiedad básica del modelo Solow-Swan, explica en gran medida el crecimiento económico de países y regiones.[31]

El modelo también predice que, si no se producen mejoras continuas de tecnología, el crecimiento per cápita cesará en algún momento. Este pronóstico también tiene su origen en el supuesto de rendimientos decrecientes del capital; sin embargo, se ha observado que tasas positivas de crecimiento per cápita pueden mantenerse durante un siglo o más, y que dichas tasas de crecimiento no muestran una tendencia clara a disminuir. Los teóricos neoclásicos del crecimiento identificaron esta deficiencia del modelo, y generalmente la corrigen asumiendo el supuesto de que el avance tecnológico ocurre de manera exógena. Este arreglo concilia la teoría con una tasa de crecimiento per cápita positiva y posiblemente constante a largo plazo, al mismo tiempo que mantiene la predicción de la convergencia condicional. Sin embargo, el punto débil radica en que la tasa de crecimiento per cápita a largo plazo es determinada exclusivamente por un unico elemento, la tasa de progreso tecnológico, que no está en el modelo. Así pues, se observa un modelo de crecimiento que lo explica todo menos el crecimiento a largo plazo.

De esta manera, los economistas del crecimiento se avocaron a realizar investigaciones econométricas para verificar empíricamente si las economías pobres tienden a alcanzar a las ricas, o si tienden a crecer más de prisa que éstas; es decir, a comprobar la validez empírica del concepto de convergencia absoluta.[32]

31 Barro y Sala-i-Martin (2009: 16-17).
32 Barro y Sala-i-Martin (2009: 516-541).

Algunos investigadores han utilizado la ausencia de correlación entre el crecimiento y el nivel inicial de renta como prueba en contra de los modelos neoclásicos de crecimiento de Solow-Swan y Ramsey-Cass-Koopmans. Sin embargo, si las distintas economías de una muestra tienden hacia distintos estados estacionarios, la ausencia de convergencia absoluta entre economías es perfectamente congruente con la teoría neoclásica. En otras palabras, el modelo neoclásico predice convergencia condicional y no absoluta: al mantener constantes las variables que aproximan el estado estacionario, la teoría predice una correlación parcial negativa entre crecimiento y el nivel inicial de renta.

Por lo tanto, un estudio econométrico relevante utiliza un modelo empírico que relaciona la tasa de crecimiento per cápita real con dos tipos de variables: en primer lugar, niveles iniciales de variables de estado, como el stock de capital físico y el stock de capital humano en forma de nivel educativo y de salud, y en segundo lugar, variables de control o ambientales (algunas de las cuales son elegidas por el Estado y otras por agentes privados), como la razón entre consumo público y PIB, la razón entre inversión nacional y PIB, el grado de apertura exterior, cambios en la relación real de intercambio, tasa de fertilidad, indicadores de estabilidad macroeconómica, medidas del grado de respeto a la ley y a la democracia, etc.[33]

Los resultados obtenidos fueron los siguientes: para valores dados de PIB per cápita y capital humano, el crecimiento depende directamente del grado de respeto a la ley y del grado de apertura internacional; al contrario de la razón entre consumo público y PIB y la tasa de inflación. El crecimiento aumenta cuando se presentan variaciones favorables de la relación real de intercambio y disminuye al aumentar las tasas de fertilidad. La relación entre el crecimiento y la razón de inversión es directa pero débil cuando las variables se mantienen constantes y si se utiliza como variable instrumental la razón de inversión rezagada.

33 Véase Acemoglu (2009: 83). Más adelante se ofrecerá la ecuación de regresión correspondiente.

Las ecuaciones de regresión del modelo de Solow-Swan

Un enfoque popular para validar el modelo de Solow es mediante regresiones de crecimiento, lo cual involucra estimar modelos de regresión con tasas de crecimiento de un país en el lado izquierdo. Esas regresiones han sido usadas ampliamente siguiendo el trabajo de Barro (1991). Para ver cómo esas regresiones son generadas y cuáles son sus limitaciones, regresaremos al modelo básico de Solow con un crecimiento de la población constante y un cambio tecnológico que incrementa el trabajo en tiempo continuo. En este modelo, el equilibrio se describe por las siguientes ecuaciones:[34]

$$y(t) = A(t)f(k(t)) \tag{61}$$

y por:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t)}{k(t)} - (n + \delta + g) \tag{62}$$

Donde $A(t)$ es el término tecnológico aumentador del trabajo, $k(t) \equiv K(t)/(A(t)L(t))$ es la razón capital/trabajo efectivo, y $f(k)$ es la función de producción per cápita. Derivando (61) con respecto al tiempo y dividiendo ambos lados por $y(t)$ se obtiene:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \varepsilon_k(k(t))\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \tag{63}$$

Donde:

$$\varepsilon_k(k(t)) \equiv \frac{f'(k)k(t)}{f(k)} \tag{64}$$

34 Esta sección está fundamentada principalmente en Acemoglu (2009: 80-84).

es el coeficiente de elasticidad[35] de la función de producción per cápita $f(k)$. Ahora, es preciso considerar una expansión de Taylor de primer orden en la ecuación (62) con respecto a log $k(t)$ alrededor del valor del estado estacionario k^*. Esta expansión implica que para $k(t)$ en la vecindad de k^* , tenemos:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \approx \left(\frac{sf(k^*)}{k^*} - n - \delta - g\right) + \left(\frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)} - 1\right) s\frac{f(k^*)}{k^*}(\log k(t) - \log k^*) \qquad (65)$$

$$\approx (\varepsilon_k(k^*) - 1)(n + \delta + g)(\log k(t) - \log k^*) \qquad (66)$$

El uso del símbolo ≈ es para enfatizar que ésta es un aproximación lineal la cual ignora los términos de segundo orden. En particular, la primera ecuación (65) se consigue simplemente con derivar $k(t)$/k(t) con respecto a log $k(t)$ y evaluando las derivadas en el punto de equilibrio k^* (e ignorando los términos de segundo orden). La segunda ecuación (66) utiliza el hecho de que el primer término en la primera ecuación es igual a cero por la definición del valor del estado estacionario k^*. Ahora, sustituyendo esta aproximación en (63), tenemos:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \approx g - \varepsilon_k(k^*)(1 - \varepsilon_k(k^*))(n + \delta + g)(\log k(t) - \log k^*) \qquad (67)$$

Se define $y^*(t)= A(t)f(k^*)$ como el nivel de producción per cápita en el estado estacionario, esto es, el nivel de producción per cápita que se aplicaría si la razón capital trabajo efectivo alcanzará su valor estacionario y la tecnología estuviera en un mismo nivel en el tiempo t. Una expansión de Taylor de primer orden de log $y(t)$ con respecto a log $k(t)$ alrededor de log k^* da como resultado:

$$\log y(t) - \log y^*(t) \approx \varepsilon_k(k^*)(\log k(t) - \log k^*) \qquad (68)$$

35 Hay que recordar que los coeficientes de elasticidad son adimensionales y su valor se encuentra restringido entre 0 y 1.

Al combinar esto con la ecuación previa produce la siguiente ecuación de convergencia:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \approx g - (1 - \varepsilon_k(k^*))(n + \delta + g)(\log y(t) - \log y^*) \tag{69}$$

La ecuación (69) deja claro que en el modelo de Solow-Swan hay dos fuentes de crecimiento del producto per cápita: la primera es g, la tasa de progreso tecnológico y la segunda es la convergencia. Esta última es una consecuencia del impacto de la brecha entre el nivel actual del producto per cápita y el nivel del estado estacionario de la producción per cápita sobre la tasa de acumulación del capital físico. Intuitivamente, entre menor sea la razón capital/trabajo del estado estacionario de un país, mas rápido será su crecimiento económico.

Otra característica notable es que la velocidad de convergencia en (69), medida por el término $(1 - \varepsilon_k(k^*))(n + \delta + g)$ multiplicando la brecha entre $\log y(t)$ y $\log y^* (t)$ depende de $(n + \delta + g)$ y del coeficiente de elasticidad de la función de producción, $\varepsilon_k(k^*)$. Ambos términos capturan los efectos intuitivos. El término $(n+\delta +g)$ determina la tasa a la cual la razón capital/trabajo efectivo necesita ser repuesto. Entre mayor sea esta tasa de reposición, mayor será la cantidad de la inversión en la economía y mayor la posibilidad de un ajuste más rápido. Por otro lado, cuando $\varepsilon_k(k^*)$ es alto, estamos cerca de una función de producción AK lineal; en este caso, la convergencia debería de ser lenta. En el caso extremo donde $\varepsilon_k(k^*)$ es igual a 1, la economía toma la forma AK, y no hay convergencia.

La ecuación motivante para la regresión de crecimiento, la ecuación (69), es obtenida para una economía cerrada. Cuando observamos las diferencias de ingreso entre países o las experiencias de crecimiento, el uso de esta ecuación impone el supuesto de que cada país es una isla. En otras palabras, el mundo es interpretado como una colección de economías cerradas sin relación entre ellas. En la práctica, los países intercambian bienes, intercambian ideas e interactuán en los mercados financieros internacionales. Esas interacciones implican que el comportamiento de los países no estaría contemplado en su totalidad por la ecuación(69) sino por un sistema de ecuaciones que caracterizáran el equilibrio del mundo entero. Interpretar las experiencias de crecimiento entre países por medio de la relación (69), en un mundo con economías en interacción, puede conducir a resultados erróneos.

Usando una aproximación de tiempo discreto, la ecuación (69), que es la ecuación motivante, da lugar a la siguiente ecuación de regresión:

$$g_{i,t,t-1} = b^0 + b^1 \log y_{i,t-1} + \epsilon_{i,t} \tag{70}$$

Donde $g_{i,t,t-1}$ es la tasa de crecimiento del país i entre el periodo $t-1$,y t, log $y_{i,t-1}$ es la cantidad inicial (al tiempo $(t-1)$) del log de la producción per cápita de ese país, y $\epsilon_{i,t}$ es un término estocástico que captura todas las influencias omitidas. Si esta ecuación es estimada con una muestra de países de la OCDE, y en efecto b^1 resulta ser negativa; entonces países como Irlanda, Grecia, España y Portugal, que eran relativamente pobres al final de la Segunda Guerra Mundial deberían haber crecido mucho más rápido que el resto de países de la región.

Por otro lado, en un mundo donde los países difieren según sus características, una ecuación de regresión más apropiada podría tomar la siguiente forma:

$$g_{i,t,t-1} = b_i^0 + b^1 \log y_{i,t-1} + \epsilon_{i,t} \tag{71}$$

donde la principal diferencia es que ahora el término constante b^0_i es propio de cada país i. La tercera ecuación de regresión que se puede derivar:

$$g_{i,t,t-1} = \mathbf{X}_i^T \beta + b^1 \log y_{i,t-1} + \epsilon_{i,t} \tag{72}$$

Ha sido utilizada para sostener la convergencia condicional y para estimar los determinantes del crecimiento económico. En particular, puede parecer natural asumir que los estimadores del vector de coeficientes β contendrán información acerca de los efectos causales de diferentes variables sobre el crecimiento económico; por ejemplo, el hecho de que las variables de escolaridad sean coeficientes positivos en los estimadores de la regresión se presenta como evidencia de que la educación influye el crecimiento. La simplicidad de estas ecuaciones de regresión y el hecho de que ellas crean un puente entre la teoría y los datos las han vuelto populares en las últimas décadas.

5. Un análisis crítico de los modelos de crecimiento

Esta sección tiene como propósito principal el análisis de los fundamentos teóricos sobre los cuales se construyen los modelos modernos de crecimiento económico, en particular el modelo de Solow y sus ampliaciones. Asimismo, aquí se discute la formalización creciente, y para algunos excesiva, de la ciencia económica en general y de los modelos de crecimiento en particular.

5.1. Los supuestos y otras limitaciones

Los supuestos básicos que subyacen a la teoría económica neoclásica y, en consecuencia, a las teorías del crecimiento económico junto con sus modelos matemáticos son los siguientes:

1 Se asume un comportamiento maximizador o un cálculo racional medios/fines por parte de los agentes económicos.

2 Este comportamiento racional o maximizador mantiene estables las preferencias en términos de aspectos básicos de la vida, como: alimentación, diversión, educación, salud, ingreso y riqueza. Se asume que los individuos de cualquier lugar, sin importar su condición social, difieren poco con respecto a esas cuestiones básicas; por lo cual, la teoría económica neoclásica es considerada la ciencia universal del comportamiento humano y se cree que sus métodos y supuestos son aplicables a todos los tiempos y a todos los lugares.

3 Se asume que los mercados se desarrollan de forma natural para coordinar, con diferentes grados de eficiencia, las acciones de los participantes.

Esta teoría neoclásica sostiene que los agentes (consumidores y productores) son la única realidad social. Se asume que todos ellos son iguales (actúan igual) y sus necesidades básicas no son distintas. Asimismo, se asume que ellos son optimizadores racionales (hacen una elección consciente para maximizar, o al menos satisfacer, sus intereses al menor costo posible). De acuerdo con esta doctrina de optimización restringida, si cada individuo existe en un mundo de escasez y restricciones, cada uno de ellos deseará hacer el más eficiente uso de sus recursos disponibles. Este modelo de elección racional se aplica solamente a la intención y no al resultado. El fracaso de un individuo para alcanzar un fin u objetivo debido a la ignorancia o alguna otra causa no invalida la premisa de que los individuos actúan sobre la base de un cálculo costo/beneficio o un cálculo medios/fines.

El comportamiento de los consumidores y productores en la búsqueda racional de sus objetivos está gobernado por el principio de utilidad marginal. En el lado de la demanda, al incrementar su consumo, un consumidor experimentará una disminución de su utilidad. En el lado de la oferta, al expandir la producción, un productor comenzará a enfrentar rendimientos decrecientes y elevación de costos por unidad.

La creencia de que todos los individuos son optimizadores racionales constituye el fundamento de la afirmación de que la economía neoclásica es una ciencia universal basada en leyes objetivas de los mercados y aplicable a cualquier economía sin importar su nivel de desarrollo o su cultura. Se considera que sus teorías son objetivas, universales y aplicables a todas las sociedades y a todos los periodos históricos. Este también sería el caso de la teoría neoclásica del crecimiento económico. Por lo tanto, se sostiene que la economía neoclásica sería la unica y universal ciencia social. Otra implicación importante y de largo alcance de la optimización racional es que este enfoque y su énfasis en la elección individual es atribuible a todos los aspectos del comportamiento humano.

La ciencia económica tiene limitaciones (compartidas por los modelos de crecimiento económico) que debilitan tanto sus reclamos de ser una ciencia exacta como su aspiración de ser una herramienta analítica útil. Quizá la más importante de todas las limitaciones sea que ciertos supuestos que subyacen a la teoría económica neoclásica son irreales. Los principales son: la racionalidad individual, el que los agentes económicos tienen información completa, el que los mercados sean perfectamente competitivos. Aunque se le ha puesto atención considerable a esos temas, se asume que esos problemas son excepciones más que limitaciones inherentes. De igual forma, aunque muchos economistas admiten la irrealidad de los supuestos que subyacen a la teoría económica y tratan de superar ese problema, la mayoría está de acuerdo en que no es relevante si los supuestos son irreales. De acuerdo con esta idea, lo importante es si esos supuestos conducen a proposiciones que puedan ser probadas empíricamente, ya que de esa manera se mostraría su validez.

Si los economistas realmente escogieran las teorías a partir de la evidencia empírica, no habría problema, pero pocas teorías son probadas empíricamente y los economistas eligen teorías muchas veces por razones ideológicas. Más contundente es el hecho de que pocas teorías o hipótesis satisfacen la prueba poperiana de falsabilidad. En otras palabras, las teorías no pueden ser probadas empíricamente para determinar su validez. Además, el ataque a los que piden supuestos realistas sería más convincente si las predicciones y pronósticos de los economistas fueran realmente exactos, pero, por lo general, no lo son.

Por otro lado, el supuesto de que la economía neoclásica es una ciencia universal aplicable en todo tiempo y lugar puede conducir a distorsiones analíticas y a prescripciones de políticas equivocadas. Su incapacidad o rechazo a reconocer la importancia de las diferencias entre los Estados y las sociedades o la influencia de los marcos culturales e históricos limita la utilidad de esta teoría económica y, por supuesto, de los modelos de crecimiento económico. Asimismo, la mayoría de los economistas neoclásicos aceptan explícitamente la distribución existente de la riqueza y de los derechos de propiedad y su legitimidad (dentro y entre las naciones). Esta es una actitud que algunas veces conduce a la indiferencia respecto a problemas sociales.

Todos los señalamientos que hemos mencionado son importantes y siempre hay que tenerlos presentes para dimensionar el valor analítico de la ciencia económica. No obstante esos señalamientos y limitaciones, se debe aceptar que la teoría económica neoclásica posee herramientas analíticas muy útiles y un cuerpo de ideas teóricas (o modelos) para entender los mercados. Por esa razón, si se pretende entender el funcionamiento de una economía, se debe comenzar con al menos un conocimiento rudimentario de cómo la teoría económica entiende a la economía como un mercado o un mecanismo de precios, para posteriormente analizar la carga política, psicológica e ideológica que los agentes económicos llevan a los mercados, muchas veces inclusive para manipularlos.

Por lo tanto, se puede considerar que la teoría neoclásica es la más sistemática y rigurosa de las ciencias sociales y es el punto de inicio necesario para entender no sólo el crecimiento económico, sino también otros aspectos de la economía y la sociedad. Pero hay que enfatizar que esta concepción teórica es solo eso, un punto de partida; es el comienzo y no el fin del análisis. Los modelos formales sólo contribuyen a explicar la mecánica del crecimiento económico y tienen que ser complementados con otros análisis fuera del ámbito de la ciencia económica, si se quiere entender cabalmente un problema fundamental de la realidad social, como el crecimiento económico.

5.2. El formalismo de la teoría económica y de los modelos de crecimiento

Se piensa que la ciencia económica se ha vuelto demasiado formal y abstracta. Lo mismo se piensa del área del crecimiento económico. En gran medida se considera que el estudio de la economía como el desarrollo de modelos formales se ha vuelto irrelevante para entender y resolver los problemas económicos y sociales.

¿Por qué la ciencia económica siguió esa ruta? Posiblemente porque quiso ser una ciencia social semejante a la matemática. Esto la condujo a la modelación de esa índole, y a la resultante exaltación de la técnica y de la elegancia formal. Esta ciencia social se convirtió en una clase de matemáticas sociales que emplea palabras tales como agente representativo, bien, preferencias, precio, mercado. Parece economía, pero la mayoría de las relaciones son de tipo matemático; todas las inferencias son obtenidas matemáticamente y poca atención se da a si esas variables, conceptos o relaciones funcionales tienen alguna semejanza con una observación del mundo real.

No se trata de estar en contra de la modelación ni de la matemática. Estas pueden ser un instrumento muy útil, pero no como un fin en sí mismas. La tendencia de la economía hacia el formalismo ha tenido sus consecuencias. Se sobrevalora la forma en detrimento del contenido y del argumento. Se atiende sólo a la forma en que una teoría económica o hipótesis es presentada, y no se atiende casi nada al contenido de la hipótesis.[36]

Por lo que respecta a los modelos es importante realizar algunos señalamientos. Un modelo económico formal puede definirse como un instrumento intelectual que puede ser usado para explicar una variable o un evento particular, como es el caso de los modelos de crecimiento

36 Blaug (1998).

económico.[37] Son una abstracción basada en una teoría económica. Este tipo de modelo contiene algunas variables endógenas cuyos valores (precios o cantidades) están determinados lógicamente dentro del mismo. La explicación de un evento también requiere variables exógenas y uno o más supuestos de comportamiento que conectan las variables endógenas y exógenas. El supuesto de comportamiento central es que los agentes individuales son racionales y están buscando siempre satisfacer sus propios intereses económicos. Las variables exógenas son las condiciones iniciales que determinan el valor de las variables endógenas. Esas variables independientes son externas al modelo; ellas pueden incluir un cambio en las preferencias del consumidor, la innovación tecnológica y más factores.

Los modelos definen el área de conocimiento de la economía. Si no hay un modelo disponible para explicar un fenómeno particular, éste es de poco interés para los economistas neoclásicos sin importar su relevancia para el mundo real. Los modelos juegan un papel selectivo crucial en la determinación de lo que se elige analizar. Por ejemplo, si una teoría no puede ser expresada a través de un modelo formal que, al menos en principio, permita comprobarla, entonces no será de interés. Esto significa que muchas ideas y teorías que pueden explicar asuntos económicos son ignoradas en favor de ideas que pueden ser probadas. Esta tendencia conduce a señalar que la teoría económica, que incluye la teoría del crecimiento económico, carece de relevancia. Sin embargo, los economistas neoclásicos no dudarían en responder que ellos preferirían ser irrelevantes que estar equivocados.

Por otro lado, un modelo se construye para una situación específica, y como las situaciones pocas veces son iguales, es difícil saber si el modelo es aplicable y si puede predecir o explicar el resultado de una situación particular. Además, ya que todas las teorías económicas son

37 Esta observación crítica y las que siguen se apoyan parcialmente en Gilpin (2001: 47-76).

parciales, la utilidad de los modelos está severamente limitada. Asimismo, el asunto se complica si se tiene que trabajar con un gran número de variables que obligue a usar supuestos simplificadores.

Aunque los economistas neoclásicos reclaman que la economía es una ciencia objetiva igual que la física, actualmente está construida sobre supuestos normativos o juicios de valor aceptados por la mayoría de los economistas convencionales. Esos supuestos influencian la elección de temas que los economistas estudian y las respuestas que aceptarán. Estos juicios de valor frecuentemente juegan un papel importante en la determinación de cual modelo se acepta o se rechaza. De esta manera, los supuestos normativos algunas veces influencian las prescripciones de políticas.

Conclusiones

El problema del crecimiento económico es complejo porque involucra múltiples aspectos, no sólo de carácter económico, sino también de carácter político, cultural, geográfico, histórico e inclusive aspectos circunstanciales o estocásticos. Esta complejidad se acentúa al observar el gran número de teorías y modelos que se han propuesto; y al no existir, por tanto, un consenso acerca de los determinantes del crecimiento. Esto último implica que no existe una teoría unificada que permita estudiar de forma conjunta los hechos relacionados con el crecimiento. No obstante esta importante limitación, sí contamos con algunos marcos teóricos que ofrecen respuesta a ciertas cuestiones generales o particulares del crecimiento. Este es el caso de los modelos analizados en la presente investigación, que son un buen punto de partida, ya que su énfasis en la acumulación de capital, el desarrollo de capital humano, el progreso tecnológico, la población y la contaminación, parecen ser consistentes con los hechos.

Como se señaló en esta investigación, la formalización matemática excesiva en el área del crecimiento económico puede añadir otra complicación a la comprensión del crecimiento, ya que en muchas ocasiones ese formalismo excesivo nubla la comprensión de las ideas y las hipótesis, lo cual impide que se entienda cabalmente este fenómeno. En este aspecto es importante señalar que no se han cuestionado seriamente los efectos que ha tenido la formalización matemática en las teorías de crecimiento económico. ¿Ha brindado el formalismo matemático nuevas perspectivas sobre el crecimiento, o sólo ha complicado un tema que en sí es difícil de comprender?

Por último, nos permitimos indicar la dirección que seguirá nuestra investigación en lo inmediato, ya que este documento aspira ser una guía en el estudio del crecimiento. En la esfera de la mecánica del crecimiento analizaremos a profundidad el modelo neoclásico. En lo que corresponde a la esfera de los determinantes fundamentales, que subyacen a los determinantes inmediatos del crecimiento que se formalizan a través de la construcción de modelos, investigaremos la relación entre los regímenes políticos y el crecimiento económico.

Anexo

A. Solución de la ecuación fundamental de Solow-Swan

El cambio de variable que se utiliza para resolver la ecuación fundamental de Solow-Swan es el siguiente:

$$\nu = k^{1-\alpha} \tag{73}$$

Derivando la ecuación (73) se obtiene:

$$\dot{\nu} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k} \tag{74}$$

$$\dot{k} = \frac{k^{\alpha}}{(1-\alpha)}\dot{\nu} \tag{75}$$

Si se reescribe la ecuación (31) como:

$$k^{-\alpha}\dot{k} + (n+\delta)k^{1-\alpha} = s \tag{76}$$

Entonces, se sustituye (73) y (76) en la ecuación (31) se obtiene una ecuación diferencial lineal en términos de la nueva variable $\nu(t)$:

$$k^{-\alpha}\left(\frac{k^{\alpha}}{(1-\alpha)}\dot{\nu}\right) + (n+\delta)\nu = s \tag{77}$$

$$\dot{\nu}(t) + (1-\alpha)(n+\delta)\nu(t) = s(1-\alpha) \tag{78}$$

Al resolver la ecuación (78)[38] se obtiene:

$$\nu(t) = \frac{s}{n+\delta} + \left(\nu_0 - \frac{s}{n+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} \tag{79}$$

Con la condición inicial:

$$\nu_0 = k_0^{1-\alpha} \tag{80}$$

Volviendo a la variable original, la ecuación (79) se transforma en:

$$k^{1-\alpha}(t) = \frac{s}{n+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta}\right)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} \tag{81}$$

38 Ver Shone (2009: 35-37).

Elevando (81) por $\frac{1}{1-\alpha}$ se obtiene la solución general de la ecuación fundamental de Solow-Swan:

$$k(t) = \left(\frac{s}{n+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta} \right) e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{82}$$

B. Demostraciones

Demostración 2.1 Para la demostración se utiliza el siguiente teorema:[39]

Teorema 2.1 (Teorema de Euler). *Suponga que $f = f(x_i)$ es una función de i = 1, 2, ..., n variables y es diferenciable en xi $\in \mathbb{R}$, con derivadas parciales denotadas por f_{xi} y es además una función homogénea de grado m. Entonces:*

$$mf(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} x_i$$

Por lo tanto, por el teorema de Euler y por las condiciones 1 y 2 se puede expresar la función de producción (1) como:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial K_i} K_i(t)$$

Pero, por la condición de maximización de las ganancias ($\pi(t)$) se tiene:

$$w_i(t) = \frac{\partial F}{\partial K_i}$$

Por consiguiente:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t) K_i(t)$$

39 Acemoglu (2009: 29-30).

Demostración 3.1 Las condiciones 1 y 3 son suficientes para asegurar la existencia de un solo estado estacionario determinado por k*. Asimismo, como la función de producción se puede escribir como función del capital per cápita, entonces la función de producción solo tiene un estado estacionario determinado por:

$$y^* = f(k^*)$$

Por otra parte, la relación entre el consumo per cápita y la producción per cápita se puede obtener facilmente al usar las propiedades descritas en la condición 3. Por lo tanto:

$$c(t) = (1 - s)y(t) = (1 - s)f(k)$$

Entonces, en el estado estacionario el consumo per cápita esta dado por:

$$c^*(t) = (1 - s)f(k^*)$$

Demostración 3.2 Para la demostración utilizamos el siguiente corolario:[40]

Corolario. *Sea g: R → R una función continua y diferenciable. Suponga que g(x*)=0 y además g(x) < 0 para todo x>x* y g(x) > 0 para todo x<x*. Entonces, el estado estacionario (x*) de la ecuación diferencial x(t)= g(x(t)) es asintóticamente estable, es decir, iniciando desde cualquier x(0), x(t) → x*.*

Por lo tanto, sea $g(k) \equiv sf(k) - (n + \delta)k(t)$, entonces para todo $k>k^*$ tenemos que $g(k) < 0$ y para todo $k<k^*$ se tiene que $g(k) < 0$. Por consiguiente, el estado estacionario, k^*, de la ecuación fundamental de Solow-Swan $k(t) = g(k(t))$ es asintóticamente estable.

Demostración 4.1 La argumentación de la demostración es igual a la mostrada en la demostración 3.1, solo que ahora las variables involucradas están definidas por unidad de trabajo efectivo.

40 Acemoglu (2009: 51-52).

Demostración 4.2 La argumentación de la demostración es igual a la mostrada en la demostración 3.2, solo que ahora la variable involucrada es el capital por unidad de trabajo efectivo $\dot{k}$.

Demostración 4.3 Al definir el consumo por unidad de trabajo efectivo:

$$\mathcal{C}(t) \equiv \frac{C(t)}{A(t)L(t)}$$

y utilizando las definiciones (34) y (35) podemos volver a las variables per cápita $k(t)$, $y(t)$ y $c(t)$ al notar que:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} = A(t)\mathcal{K}(t), \quad y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = A(t)\mathcal{Y}(t), \quad c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} = A(t)\mathcal{C}(t)$$

Si derivamos respecto del tiempo las anteriores expresiones y dividimos entre $k(t)$, $y(t)$ y $c(t)$ respectivamente se obtiene:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{\mathcal{K}}(t)}{\mathcal{K}(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{\mathcal{K}}(t)}{\mathcal{K}(t)} + g$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{\mathcal{Y}}(t)}{\mathcal{Y}(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{\mathcal{Y}}(t)}{\mathcal{Y}(t)} + g$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\dot{\mathcal{C}}(t)}{\mathcal{C}(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{\mathcal{C}}(t)}{\mathcal{C}(t)} + g$$

Donde g es la tasa de progreso tecnológico. Luego, considerando que en el estado estacionario (K^*, Y^*, C^*) las tasas de crecimiento de K, Y y C son nulas, se obtiene:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = g, \quad \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g, \quad \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = g$$

Por lo tanto, en el estado estacionario el capital, la producción y el consumo per cápita crecen a la misma tasa que el progreso tecnológico.

Demostración 4.4 La tasa de crecimiento del capital per cápita se obtiene inmediatamente de la ecuación (41):

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sA - n - \delta$$

La tasa de crecimiento de la producción per cápita se obtiene de la ecuación (40) al dividir entre el trabajo ($L(t)$):

$$y(t) = Ak(t)$$

y posteriormente derivar respecto del tiempo y dividir nuevamente entre la ecuación de $y(t)$:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sA - n - \delta$$

De la relación (19) entre el consumo per cápita y la producción per cápita se obtiene la tasa de crecimiento del consumo:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = sA - n - \delta$$

Por consiguiente, en el modelo de Solow-Swan, con una función tipo AK existe una trayectoria de crecimiento balanceado donde el capital, la producción y el consumo per cápita crecen a una tasa constante determinada por ($sA - n - \delta$).

Demostración 4.5 La solución de la ecuación (41) se obtiene inmediatamente por el método de separación de variables:

$$\frac{dk}{dt} = (sA - n - \delta)k$$

$$\int \frac{dk}{k} = \int (sA - n - \delta)dt$$

$$\ln k = (sA - n - \delta)t + a$$

Donde a es una constante de integración. Tomando la exponencial en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$k(t) = e^{(sA-n-\delta)t}e^{a} = k_0 e^{(sA-n-\delta)t}$$

Para el caso de la producción per cápita, de la ecuación (40) se consigue su trayectoria de equilibrio:

$$y(t) = Ak(t) = Ak_0 e^{(sA-n-\delta)t}$$

Demostración 4.6 La demostración es demasiado extensa para ser incluida en este anexo. Para el lector interesado consultar Acemoglu (2009: 86-88).

Demostración 4.7 La demostración hace uso del teorema de Hartman–Grobman el cual permite establecer de forma local la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico. No obstante, la demostración para el caso del modelo de Solow-Swan con capital humano es demasiado extensa para ser incluida. Para el lector interesado puede consultar Acemoglu (2009: 926-927) o para un tratamiento más práctico sobre la utilización de métodos cualitativos para determinar el tipo de estabilidad puede consultar Shone (2002, Capítulo 4) o Lomelí y Rumbros (2005, Capítulo 5).

Bibliografía

Acemoglu, Daron. *Introduction to modern economic growth*. Princeton: University Press, 2009.

Acemoglu, Daron y Robinson, James A. *Por qué fracasan los países*. Crítica, México, 2013.

Barro, Robert J. "Economic Growth in a Cross Section of Countries" *Quarterly Journal of Economics*, May 1991, pp. 407-443.

Barro, Robert J. y Sala-i-Martin, Xavier. *Crecimiento económico*. Reverte, México, 2009.

Benhabib, Jess y Spiegel, Mark M. "The role of human capital in economic development: evidence from aggregate cross-country data". *Journal of Monetary Economics*, 1994, vol. 34, 2, pp. 143-173.

Blaug, Mark. "The problems with formalism: interview with Mark Blaug". *Challange*, 1998, vol. 41, no. 3, pp. 35-45.

Brock, William A. y Taylor, M. Scott. "The Green Solow Model". *Journal of Economic Growth*, 1994, vol. 15, pp. 127-153.

Cai, Donghan. "An economic growth model with endogenous carrying capacity and demographic transition". *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, vol. 55, pp. 432-441.

Gilpin, Robert. *Global political economy*. Princeton: University Press, 2001.

Guerrini, Luca. "The Solow–Swan model with a bounded population growth rate". *Journal of Mathematical Economics*, 2005, vol. 42, pp. 14–21.

Landes, David S. *La riqueza y la pobreza de las naciones*. Javier Vergara Editor, Madrid, 1999.

Lomelí, Héctor E. y Rumbros, Irma B. *Métodos dinámicos en economía*. Thomson, México, 2005.

Lucas, Robert E. "On the Mechanics of Economic Development". *Journal of Monetary Economics*, 1988, vol. 22, 1, pp. 3-42.

Mankiew, N. Gregory; Romer, David y Weil, David N. "A Contribution to the Empirics of Economic Growth". *The Quarterly Journal of Economics*, 1992, vol. 107, no. 2, pp. 407-437.

Overtverdt, Johan Van. *The Chicago School: how the University of Chicago assembled the thinkers who revolutionized economics and business*. Agate: B2 Book, Chicago, 2007.

Ramsey, Frank P. "A Mathematical Theory of Saving". *The Economic Journal,* 1928, vol. 38, no. 152, pp. 543-559.

Romer, Paul M. "Increasing Returns and Long-Run Growth". *The Journal of Political Economy*, 1986, vol. 94, no. 5, pp. 1002-1037.

Scarpello, Giovanni y Ritelli, Danielle. "The Solow Model Improved Through the Logistic Manpower Growth Law". *Annali dell'Universitá di Ferrara*, 2003, vol. 49, 1, pp. 73-83.

Shone, Ronald. Economic Dynamics. Cambridge, Estados Unidos: University Press, 2002.

Solow, Robert M. "A Contribution to the Theory of Economic Growth". *Quarterly Journal of Economics*, 1956, vol. 70, no. 1, pp. 65-94.

Solow, Robert M. "Reflections on Growth Theory" en Aghion, P. (ed.) *Handbook of Economic Growth*, vol. 1, Elsevier, Maryland, 2005.

Swan, Trevor W. "Economic Growth and Capital Accumulation". *Economic Record*, 1956, vol. 32, 2, pp. 334-361.

Vialar, Thierry. *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics*. Berlín: Springer-Verlag, Germany, 2009.

Weil, David N. *Crecimiento económico*. Pearson Addison Wesley, México, 2006.