

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO NEOKEYNESIANO CON UNA REGLA DE TAYLOR

Numerical simulation of the new keynesian model with a Taylor Rule

| Eddy Lizarazu Alanez¹

RESUMEN

Simulamos las funciones impulso-respuesta en un modelo nekeynesiano con regla de Taylor para caracterizar la dinámica de la producción y la inflación que emana de algunos disturbios exógenos. Las simulaciones para ciertos parámetros calibrados muestran que la autoridad monetaria debe priorizar el ‘objetivo inflación’ (banco central ‘halcón’) por encima del ‘objetivo producción’ (banco central ‘paloma’). Esta estrategia es la mejor en términos de los efectos adversos provocados por los eventos monetarios exógenos. Además, si el grado de persistencia de los disturbios es mínimo, menor será el tiempo requerido para regresar al estado estacionario.

Palabras clave: Descomposición de Schur, expectativas racionales, función impulso-respuesta, modelo nekeynesiano, persistencia exógena.

Clasificación JEL: C13, C15, E52, E58

ABSTRACT

We simulate the impulse-response functions in a new-Keynesian model with the Taylor rule to characterize the dynamics of production and inflation that emanate from some exogenous disturbances (aggregate demand and supply and financial turbulences). The simulations for certain calibrated parameters show that the monetary authority must prioritize the ‘inflation target’ (central bank ‘hawk’) over the ‘production target’

¹ Doctor en ciencias Económicas por la UAM, adscrito CPMP. Profesor-investigador al Departamento de Economía de la UAM-Iztapalapa, área de Teoría Económica. Correo: <lae@xanum.uam.mx>. Agradezco a dos dictaminadores anónimos sus valiosos comentarios, los que me permitieron mejorar la presentación de algunas ideas de este artículo. Los errores que persistan se deben enteramente a mi persona.

(central bank 'dove'). This strategy is the best in terms of the adverse effects caused mainly by exogenous monetary events. Furthermore, if the degree of persistence of the disturbances is minimal, less time is required to return to the steady state.

Keywords: Impulse-response function, new-Keynesian model, persistent shocks, rational expectations, Schur decomposition.

JEL classification: C13, C15, E52, E58

1. Introducción

Analizamos el modelo nekeynesiano de economía cerrada formado por el núcleo de tres ecuaciones: la nueva ecuación IS, la nueva curva de Phillips y la regla de Taylor. Clarida *et al.* (1999, 2000), Galí (2015) y Walsh (2010), por ejemplo, consideran disturbios de costos en la nueva curva de Phillips y *shocks* de demanda agregada en la nueva ecuación IS. Es decir, los fenómenos económicos son esencialmente de carácter aleatorio. Por otro lado, la linealización de las ecuaciones estructurales estocásticas que resulta de la optimización intertemporal restringida conduce a un sistema lineal de expectativas racionales. Esta clase de sistemas estocásticos carece por lo general de una solución cerrada. En estos casos, es mejor recurrir a procedimientos numéricos para sistemas lineales estocásticos en tiempo discreto.

Si los parámetros son conocidos o calibrados, la solución estándar procede en una secuencia de dos etapas. El proceso de descomposición de la matriz Jacobiana asociado al sistema lineal de expectativas racionales es esencial para resolver las variables de estado y las variables de control, respectivamente. Entre otros, dos procedimientos son el método de descomposición canónica de Jordan y el método de descomposición de Schur. La aplicación numérica de estos métodos pone de manifiesto su utilidad en la macroeconomía moderna. El presente artículo ilustra la conveniencia de las simulaciones numéricas de las funciones impulso-respuesta para caracterizar la dinámica de las trayectorias temporales de las variables agregadas (producción real y la tasa de inflación).

El modelo macroeconómico que analizamos se abstrae del gobierno, las inversiones, la oferta de dinero, el mercado laboral y los aspectos de economía abierta. Sin embargo, se concentra en dos propiedades del modelo económico: (i) la

persistencia de los eventos exógenos, y (ii) los parámetros de la regla de Taylor.² Consecuentemente, las simulaciones numéricas muestran dos resultados: (i) los efectos de los distintos grados de persistencia en los choques exógenos, y (ii) la actitud de la autoridad monetaria respecto al ‘objetivo inflación’ *versus* el ‘objetivo producción-empleo’. Es inevitable entrelazar estas dos propiedades aun cuando pretendamos considerarlas por separado.

El artículo está organizado en cuatro secciones más un suplemento. En la segunda sección, desglosa el modelo neokeynesiano; clasifica a las variables endógenas, exógenas y parámetros e identifica a las variables de control y las variables de estado. En la tercera sección, acepta algunos parámetros calibrados y realiza las simulaciones numéricas de las funciones impulso-respuesta. Como la calibración de los parámetros es diferente de la estimación estadística, se despreocupa de las propiedades estadísticas de los estimadores. Por otro lado, acepta ciertas propiedades de los procesos estocásticos subyacentes a los *shocks* exógenos. Por ejemplo, excluye el espacio paramétrico asociado a un sistema lineal de expectativas racionales inestable. Las simulaciones numéricas para parámetros calibrados permiten caracterizar la dinámica de las principales variables de control (la tasa de inflación y la brecha de la producción). En la quinta sección, se vierten algunos comentarios a manera de conclusión. Además, al final del texto se agregan algunas notas para quien tenga interés en el álgebra de la descomposición de Schur. El suplemento muestra cómo desacoplar el sistema lineal de expectativas racionales y resolver secuencialmente las variables de estado y las variables de control.

2. El modelo neokeynesiano básico

Entre las características más importantes del modelo neokeynesiano están: (i) el comportamiento de hoy afecta el estado futuro de la economía; esto es, el comportamiento de los agentes es consecuente, más aún si la economía está expuesta a choques exógenos; (ii) los precios se establecen en forma endógena por las

² En sentido figurado, la autoridad monetaria podría ser un ‘halcón monetario’ que prioriza la inflación o una ‘paloma monetaria’ que aboga por la producción-empleo. Taylor (1983) argumentó que las buenas reglas de política generalmente requieren cambios en la tasa de fondos federales en respuesta a cambios en el nivel de precios o cambios en el ingreso real, siendo igualmente importantes ambos objetivos.

empresas (al maximizar sus beneficios), y no son determinados por el subastador walrasiano; (iii) algunas empresas tienen restricciones sobre la frecuencia con que pueden ajustar sus precios o, alternativamente, enfrentan costos por ajustar los precios de los bienes y servicios que venden, y (iv) debido a las rigideces nominales, los cambios en las tasas de interés nominales a corto plazo y la inflación no se corresponden con cambios uno-a-uno, lo que conduce a variaciones en las tasas de interés reales.

Si bien el aspecto (i) es una característica común en la macroeconomía moderna, en especial en la literatura de ciclos reales (RBC, por sus siglas en inglés), los últimos tres son aspectos esenciales en los modelos neokeynesianos. La característica (iv) es en particular el sello distintivo del proceso de conducción de la política monetaria. De esta suerte, el núcleo del modelo neokeynesiano incluye al componente de demanda agregada, a la nueva curva de Phillips y a alguna regla monetaria. Con información imperfecta, la política monetaria se modela a través de la regla de Taylor. Es decir, se procede sin inmiscuirnos en el problema planteado por la política monetaria óptima bajo incertidumbre.

Unos cuantos párrafos más adelante, se considera una versión específica del modelo macroeconómico neokeynesiano con una regla de Taylor. Siguiendo a Poutineau *et al.* (2015), cada ecuación está provista de algún fundamento económico. Dada la microeconomía de las relaciones agregadas, el dispositivo incluye a la ecuación (1.1) que materializa a la nueva ecuación IS para relacionar la brecha de la producción con la tasa de interés. La ecuación (1.2) representa a la nueva curva de Phillips que asocia la tasa de inflación con la brecha del producto. La ecuación (1.3) es la regla de Taylor que muestra el comportamiento del banco central al ajustar la tasa de interés nominal ante las fluctuaciones en la brecha del producto y la tasa de inflación.

En efecto, las tres variables fundamentales son la brecha del producto, la tasa de inflación y la tasa de interés nominal. Dependiendo de las exigencias de modelación, podemos incluir, por ejemplo, las ecuaciones (1.4) y (1.5) a fin de formalizar las definiciones de las expectativas racionales para la brecha de producto y la tasa de inflación, condiciones al conjunto de información disponible en el periodo, denotado por t . Por último, las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) capturan la inercia de los choques de demanda y oferta agregadas y las turbulencias financieras.

$$x_t = E_t x_{t+1} - \sigma(i_t - E_t \pi_{t+1}) + \epsilon_t^1, \sigma > 0 \quad (1.1)$$

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t + \epsilon_t^2, \beta \in (0,1), \kappa > 0 \quad (1.2)$$

$$i_t = \theta_1 \pi_t + \theta_2 x_t + \epsilon_t^3, \theta_1 > 1, \theta_2 > 0 \quad (1.3)$$

$$E_t x_{t+1} = E(x_{t+1} | \Omega_t) \quad (1.4)$$

$$E_t \pi_{t+1} = E(\pi_{t+1} | \Omega_t) \quad (1.5)$$

$$\epsilon_{t+1}^1 = \rho_1 \epsilon_t^1 + d_{t+1}, \rho_1 \in (-1,1), d_{t+1} \sim N(0, \sigma_d^2) \quad (1.6)$$

$$\epsilon_{t+1}^2 = \rho_2 \epsilon_t^2 + u_{t+1}, \rho_2 \in (-1,1), u_{t+1} \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (1.7)$$

$$\epsilon_{t+1}^3 = \rho_3 \epsilon_t^3 + m_{t+1}, \rho_3 \in (-1,1), m_{t+1} \sim N(0, \sigma_m^2) \quad (1.8)$$

Las variables en estas ecuaciones en su mayoría son transformaciones logarítmicas de sus valores originales. La tasa de interés nominal es la excepción, ya que es el precio que tiene el dinero. El significado de los símbolos es como se indica en el cuadro 1.

CUADRO 1: SIMBOLOGÍA DE LAS VARIABLES

i_t :	Tasa de interés nominal para el periodo t
x_t :	Brecha del producto real para el periodo t
π_t :	Tasa de inflación para el periodo t
$E_t y_{t+1}$:	Expectativas del producto real para el periodo $t+1$
$E_t \pi_{t+1}$:	Expectativas de inflación para el periodo $t+1$
ϵ_{t+1}^1 :	Choque de demanda agregada en el periodo $t+1$
ϵ_{t+1}^2 :	Choque de oferta agregada en el periodo $t+1$
ϵ_{t+1}^3 :	Choque de política monetaria en el periodo $t+1$
d_{t+1} :	Ruido blanco en el proceso estocástico de ϵ_{t+1}^1
u_{t+1} :	Ruido blanco en el proceso estocástico de ϵ_{t+1}^2
m_{t+1} :	Ruido blanco en el proceso estocástico de ϵ_{t+1}^3

Fuente: Elaboración propia.

Respecto a los parámetros, sus significados son los siguientes:

CUADRO 2: SIGNIFICADO DE LOS PARÁMETROS

β :	Tasa de descuento por parte de las empresas fijadoras de precios
θ_1 :	Sensibilidad del banco central a la tasa de inflación
θ_2 :	Sensibilidad del banco central a la brecha de producción
κ :	Grado de rigidez de precios
σ :	Aversión al riesgo
ρ_1 :	Grado de persistencia del choque de demanda agregada
ρ_2 :	Grado de persistencia del choque de oferta agregada
ρ_3 :	Grado de persistencia del choque de política monetaria
σ_d^2 :	Varianza del choque de demanda agregada
σ_u^2 :	Varianza del choque de oferta agregada
σ_m^2 :	Varianza del choque de política monetaria

Fuente: Elaboración propia.

El cuadro 3 contiene la clasificación de las variables endógenas y exógenas. Muchos errores importantes de reflexión se explican por una omisión tácita en la clasificación de las variables. Es recomendable que el soporte sea suficiente para explicar el comportamiento de todas las variables endógenas. Cada variable endógena está cimentada en algún criterio de elección.

CUADRO 3: CLASIFICACIÓN DE VARIABLES EN EL PERIODO

Endógenas:	$i_t, x_t, \pi_t, E_t y_{t+1}, E_t \pi_{t+1}, \epsilon_t^1, \epsilon_t^2, \epsilon_t^3$
Endógenas rezagadas	$\epsilon_{t-1}^1, \epsilon_{t-1}^2, \epsilon_{t-1}^3$
Exógenas:	d_t, u_t, m_t
Parámetros:	$\beta, \theta_1, \theta_2, \kappa, \sigma, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_\xi^2, \sigma_\varphi^2, \sigma_\psi^2$

Fuente: Elaboración propia.

En el caso de las variables que sirven para modelar los distintos choques (demanda, oferta y política monetaria), el cuadro anterior muestra la existencia de rezagos de las mismas debido a que suponemos prevalecen inercias en los disturbios.

Es pertinente manipular algebraicamente el conjunto de ecuaciones con el propósito de compactar el número de ecuaciones y variables endógenas. En particular, al sustituir (1.3) en (1.1) se obtiene:

$$(1 + \sigma\theta_2)x_t = E_t x_{t+1} - \sigma\theta_1\pi_t + \sigma E_t \pi_{t+1} + \epsilon_t^1 - \sigma\epsilon_t^3 \quad (1.9)$$

De esta manera, con las ecuaciones (1.2), (1.6), (1.7), (1.8) y (1.9) se conforma un sistema de ecuaciones para explicar cinco variables endógenas. Es conveniente ahora proceder en términos de una ecuación matricial, empezando primero con los diferentes choques (demanda y oferta agregada y de política monetaria) y sólo después listar las demás variables.

La separación de las variables de estado y de control se materializa en la siguiente ecuación matricial.

$$A_0 \begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ E_t x_{t+1}^2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} + A_2 \epsilon_{t+1} \quad (1.10)$$

donde,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sigma & 1 + \sigma\theta_2 & \sigma\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 & -\kappa & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ E_t x_{t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{t+1}^1 \\ \epsilon_{t+1}^2 \\ \epsilon_{t+1}^3 \\ E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_t^1 \\ \epsilon_t^2 \\ \epsilon_t^3 \\ x_t \\ \pi_t \end{bmatrix}, \epsilon_{t+1} = \begin{bmatrix} d_{t+1} \\ u_{t+1} \\ m_{t+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la ecuación (1.10) se identifican dos variables de control (no-predeterminadas) y tres variables de estado (predeterminadas).³

³ Para Blanchard-Khan (1980), una variable predeterminada satisface la propiedad $x_{t+1}^1 = E_t x_{t+1}^1$, mientras que una variable no-predeterminada cumple con la ecuación, $x_{t+1}^2 = E_t x_{t+1}^2 + \eta_{t+1}$, donde η_{t+1} denota un error de expectativas. Por su parte, Buitier (1987) sostiene que x_t^2 es una variable no-predeterminada si es una función de expectativas de variables endógenas o exógenas futuras.

CUADRO 4: VARIABLES ENDÓGENAS EN EL PERÍODO

VARIABLES DE CONTROL: x_t, π_t

VARIABLES DE ESTADO: $\epsilon_t^1, \epsilon_t^2, \epsilon_t^3$

Fuente: Elaboración propia.

En este modelo, x_t^1 es un vector de variables predeterminadas de dimensión (3×1) , mientras que x_t^2 es el vector de variables no-predeterminadas de dimensión (2×1) . Por nuestros conocimientos del álgebra lineal, se puede mostrar que la inversa de la matriz A_0 es la siguiente:⁴

$$A_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sigma}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}$$

Al multiplicar ambos lados de (1.8) por la inversa de matriz A_0 obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ E_t x_{t+1}^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} + B \epsilon_{t+1} \tag{1.9}$$

donde, $A = A_0^{-1} A_1$ y $B = A_0^{-1} A_2$, es decir

$$A = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{\sigma}{\beta} & \sigma & \sigma\theta_2 + \frac{\sigma\kappa}{\beta} + 1 & \sigma\theta_1 + \frac{\sigma}{\beta} \\ 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 & -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La estabilidad del sistema de ecuaciones depende de los valores propios de la matriz implicada. Las raíces del polinomio característico están dadas por la ecuación

⁴ La matriz inversa exige el cálculo de su determinante. El cálculo puede ser tedioso y extenso. Dos procedimientos conocidos son los métodos de Gauss y de la matriz adjunta. Afortunadamente, podemos usar programas como Matlab u Octave, dotados de cálculo simbólico y proceder de manera expedita.

$$f(\lambda) = \det(-A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \rho_3 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\sigma}{\beta} & -\sigma & \lambda - \sigma\theta_2 - \frac{\sigma\kappa}{\beta} - 1 & -\sigma\theta_1 - \frac{\sigma}{\beta} \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & \frac{\kappa}{\beta} & \lambda - \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

Esto es,

$$(\lambda - \rho_1)(\lambda - \rho_2)(\lambda - \rho_3) \left(\lambda^2 - \frac{1 + \beta + \kappa\sigma}{\beta} \lambda + \frac{1 + \theta\kappa\sigma}{\beta} \right) = 0$$

Tres de las raíces son $\lambda_1 = \rho_1$, $\lambda_2 = \rho_2$, $\lambda_3 = \rho_3$, pero las otras dos se calculan por la fórmula para una ecuación cuadrática.

$$\lambda_{4,5} = -\frac{1}{2} \left\{ 1 + \sigma\theta_2 + \frac{1 + \kappa\sigma}{\beta} \pm \sqrt{\left(1 + \sigma\theta_2 + \frac{1 + \kappa\sigma}{\beta} \right)^2 - 4 \frac{\kappa\sigma}{\beta} \left(\theta_1 - \frac{1}{\beta} \right)} \right\}$$

Como se sabe, la dinámica estable de un sistema depende de si los valores propios (en términos absolutos) son inferiores a la unidad o no. En el espacio paramétrico establecido, no se puede establecer sin ambigüedades el rango de los demás parámetros. En consecuencia, se procede en términos numéricos.⁵

3. Simulaciones de las funciones impulso-respuesta

Las funciones impulso-respuesta describen las trayectorias dinámicas de las variables endógenas que resultan de un cambio en cualquiera de las variables exógenas. Las simulaciones numéricas están elaboradas en el *R-package* a partir de la descomposición de Schur.⁶ El primer conjunto de parámetros corresponde

⁵ El método estándar que permite resolver numéricamente el sistema lineal de expectativas racionales se explica en el suplemento al final del artículo.

⁶ Los cálculos respecto a la descomposición de Schur se comprobaron también en Matlab y Octave. Los valores arrojados son prácticamente idénticos.

a determinados valores calibrados por Poutineau et al. (2015). De esta suerte, el reporte de estos autores es la referencia con los que compararemos nuestros propios resultados.⁷

CUADRO 5: CALIBRACIÓN DE LOS PARÁMETROS

Caso Referencia	Caso-A Alta persistencia	Caso-B Baja persistencia	Caso-C Halcón	Caso-D Paloma
$\theta_1=1.5$	$\theta_1=1.5$	$\theta_1=1.5$	$\theta_1=1.5$	$\theta_1=1.5$
$\theta_2=0.54$	$\theta_2=0.54$	$\theta_2=0.54$	$\theta_2=0.54$	$\theta_2=1/4$
$\rho_1=0.5$	$\rho_1=0.9$	$\rho_1=0.1$	$\rho_1=0.5$	$\rho_1=0.5$
$\rho_2=0.5$	$\rho_2=0.9$	$\rho_2=0.1$	$\rho_2=0.5$	$\rho_2=0.5$
$\rho_3=0.5$	$\rho_3=0.9$	$\rho_3=0.1$	$\rho_3=0.5$	$\rho_3=0.5$

Fuente: Elaboración propia. En todos los casos, incluyendo la referencia tenemos $\beta=0.99$, $\kappa=0.17$, $\sigma=1$.

Con el primer conjunto de datos se calcula la matriz, verificando que sea de rango completo.

$$A = A_0^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{\sigma}{\beta} & \sigma & \sigma\theta_2 + \frac{\sigma\kappa}{\beta} + 1 & \sigma\theta_1 + \frac{\sigma}{\beta} \\ 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 & -\frac{\kappa}{\beta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.000000 & 0.0 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.0 & 0.500000 & 0.0 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.0 & 0.000000 & 0.5 & 0.000000 & 0.000000 \\ -1.0 & 1.010101 & 1.0 & 1.2967172 & 0.489899 \\ 0.0 & -1.010101 & 0.0 & -0.1717172 & 1.010101 \end{bmatrix}$$

La descomposición de Schur de las matrices A_0 y A_1 es como sigue:

$Q^T A_0 Z = S$ y $Q^T A_1 Z = T$, donde

$$Q = \begin{bmatrix} -0.5724014 & -0.1177742 & 0.51131740 & -0.62063601 & 0.1088638 \\ 0.0000000 & -0.5689782 & -0.05203433 & -0.07819984 & -0.8169706 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.77650474 & 0.62063601 & -0.1088638 \\ -0.7956158 & 0.2756638 & -0.32841921 & 0.37460353 & -0.2069249 \\ -0.1983736 & -0.7657692 & -0.15820288 & 0.28840747 & 0.5157891 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.6735983 & -0.3242095 & 0.3674808 & -0.4959543 & 0.2452361 \\ 0.0000000 & -0.4225957 & -0.1141289 & -0.2371493 & -0.8672645 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.8329998 & 0.4959543 & -0.2452361 \\ -0.7004729 & 0.5330654 & -0.2490774 & 0.2696560 & -0.3007075 \\ -0.2358028 & -0.6573754 & -0.3098457 & 0.6157147 & 0.1927324 \end{bmatrix}$$

⁷ Walsh (2010) utiliza valores semejantes de los parámetros a los aquí simulados. Una advertencia respecto a los parámetros calibrados es que en esta instancia no nos interesan las propiedades estadísticas de los estimadores de los parámetros.

$$S = \begin{bmatrix} 1.176794 & 0.4135827 & 0.2951921 & -0.54145014 & -0.09231750 \\ 0.000000 & 0.7427273 & 0.1024798 & -0.02937231 & 0.28869460 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.0727555 & -0.24334581 & -0.01463081 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.14162312 & -0.22200301 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.21695900 & 0.88268223 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.5883968 & 0.2067914 & 0.14759603 & -1.78349656 & 0.138766613 \\ 0.0000000 & 0.3713637 & 0.05123991 & 0.09033359 & -0.767340652 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.53637777 & -0.78445379 & -0.008497093 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 1.38101754 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 1.065735381 \end{bmatrix}$$

La partición de las matrices por variables de estado y control es

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1.176794 & 0.4135827 & 0.2951921 \\ 0.000000 & 0.7427273 & 0.1024798 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.0727555 \end{bmatrix} \quad S_{12} = \begin{bmatrix} -0.54145014 & -0.09231750 \\ -0.02937231 & 0.28869460 \\ -0.24334581 & -0.01463081 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 1.14162312 & -0.22200301 \\ 0.21695900 & 0.88268223 \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0.5883968 & 0.2067914 & 0.14759603 \\ 0.0000000 & 0.3713637 & 0.05123991 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.53637777 \end{bmatrix} \quad T_{12} = \begin{bmatrix} -1.78349656 & 0.138766613 \\ 0.09033359 & -0.767340652 \\ -0.78445379 & -0.008497093 \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_{22} = \begin{bmatrix} 1.38101754 & 0.0000000 \\ 0.0000000 & 1.065735381 \end{bmatrix}$$

Los valores propios del sistema son

$$\lambda_1 = \frac{0.5883968}{1.176794} = 0.5, \lambda_2 = \frac{0.3713637}{0.7427273} = 0.5, \lambda_3 = \frac{0.53637777}{1.0727555} = 0.5$$

$$\lambda_4 = \frac{1.38101754}{1.14162312} = 1.209697, \lambda_5 = \frac{1.065735381}{0.88268223} = 1.207383$$

Como se observa, el número de valores propios superiores a la unidad es igual al número de variables de control (no-predeterminadas). Siguiendo el suplemento de este artículo, y bajo el criterio Blanchard-Khan (1980), concluimos que para estos valores paramétricos el sistema lineal de expectativas racionales tiene una solución única estable de la clase denominada «punto de silla».

Por otro lado, también podemos calcular las siguientes matrices de interés:

$$F = Z_{11}S_{11}^{-1}T_{11}Z_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$G = Z_{11}S_{11}^{-1}D_1 + (Z_{11}S_{11}^{-1}T_{11}Z_{11}^{-1}Z_{12}T_{22}^{-1} - Z_{11}S_{11}^{-1}T_{12}T_{22}^{-1})D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, el sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden para las tres variables de estado (predeterminada) es:

$$x_t^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_{t-1}^1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

Además,

$$M = Z_{21}Z_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0398970 & -2.059202 & -1.0398970 \\ 0.3500644 & 1.287001 & -0.3500644 \end{bmatrix}$$

$$N = Z_{21}Z_{11}^{-1}Z_{12}T_{22}^{-1}D_2 - Z_{22}T_{22}^{-1}D_2 = \begin{bmatrix} 0.6305187 & -1.9444911 & -0.6305187 & 0 & 0 \\ 0.4537519 & 0.9435678 & -0.4537519 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta suerte, podemos inferir los valores de las dos variables de control (no-predeterminadas) a partir de la siguiente ecuación:

$$x_t^2 = \begin{bmatrix} 1.0398970 & -2.059202 & -1.0398970 \\ 0.3500644 & 1.287001 & -0.3500644 \end{bmatrix} x_t^1 + \begin{bmatrix} 0.6305187 & -1.9444911 & -0.6305187 & 0 & 0 \\ 0.4537519 & 0.9435678 & -0.4537519 & 0 & 0 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1}$$

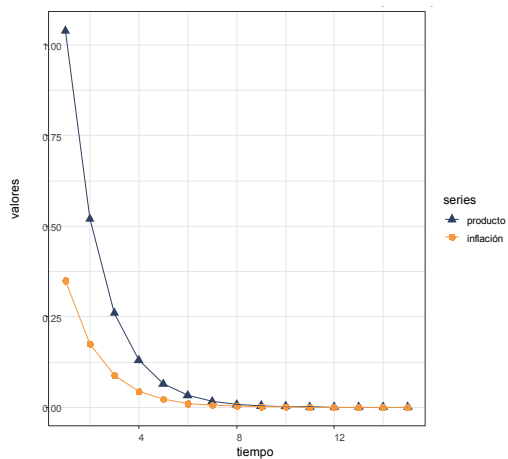
Consideremos ahora los tres diferentes tipos de disturbios (choque de demanda agregada, choque de oferta agregada y choque de política monetaria) para realizar las simulaciones de las funciones impulso-respuesta de las variables de control. En todos los casos, contemplamos un *shock* de 1% en la variable exógena. Como éste es un modelo de transformaciones logarítmicas, entonces el valor de 1% denota una variación absoluta en la tasa de crecimiento exponencial. Las unidades de tiempo se pueden interpretar como semanas o trimestres, dado que este modelo tiene una orientación de corto plazo.

3.1 Simulación para el ‘Caso Referencia’

Empecemos con las simulaciones respecto a las trayectorias dinámicas para el producto real y la tasa de inflación para el denominado ‘Caso de Referencia’.⁸

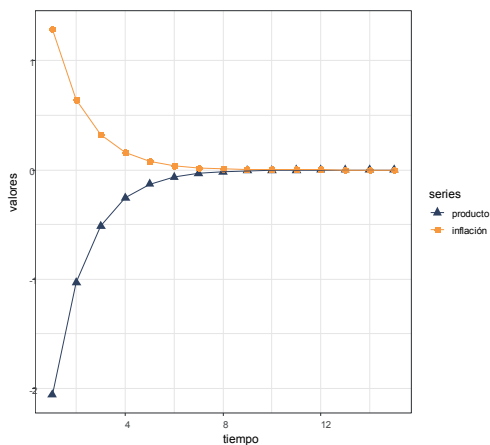
⁸ Es sumamente valioso reproducir los resultados de Poutineau et al. (2015) como punto de referencia.

GRÁFICA 1. UN SHOCK POSITIVO EN LA DEMANDA DE 1%.
SIMULACIÓN DE LA FUNCIÓN IMPULSO-RESPUESTA



Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICA 2. UN SHOCK NEGATIVO EN LA OFERTA DE 1%.
SIMULACIÓN DE LA FUNCIÓN IMPULSO-RESPUESTA



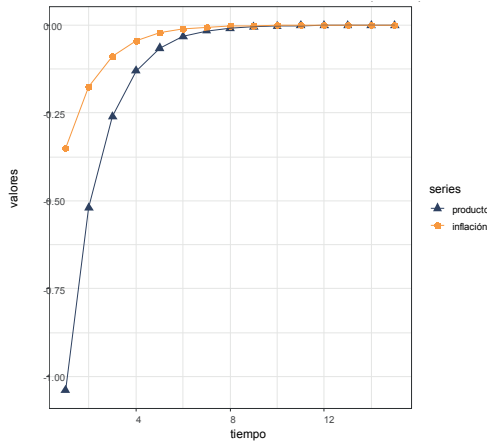
Fuente: Elaboración propia.

La gráfica 1, por ejemplo, describe el proceso de ajuste de la brecha de producto y la tasa de inflación después de un disturbio positivo de 1% en la demanda agregada. Como la teoría macroeconómica establece, tanto la brecha de producción como

la inflación aumentan. Los resultados muestran que la brecha de producción es mucho más sensible que la inflación; por este motivo, la trayectoria de inflación está por debajo de la trayectoria de la producción. El proceso de ajuste muestra que las dos variables regresarán a un estado estacionario después de más de 8 unidades de tiempo.

La gráfica 2 muestra la dinámica de la economía después de un choque inflacionario de un 1% (un choque negativo de oferta). El efecto inmediato es una contracción en la actividad económica escoltado por un proceso inflacionario. Los valores iniciales implican una caída de la producción mucho mayor que el incremento en la tasa inflación. En esta situación, el ajuste de mayor cuantía recae en la producción más que en la tasa de inflación. Sin embargo, ambas variables se ajustan de manera gradual en 8 unidades de tiempo para alcanzar su estado estacionario.

GRÁFICA 3. UN SHOCK POSITIVO EN LA TASA DE 1%.
SIMULACIÓN DE LA FUNCIÓN IMPULSO-RESPUESTA



Fuente: Elaboración propia.

La dinámica de la gráfica 3 es resultado de una turbulencia financiera, la cual se manifiesta en un alza exógena de 1% de la tasa de interés de referencia. La consecuencia es una reducción del gasto agregado y después una contracción de la producción. Esto a su vez provoca una deflación de precios. Sin embargo, la

producción y la deflación convergen a su estado estacionario, de manera gradual, en aproximadamente 8 unidades de tiempo.

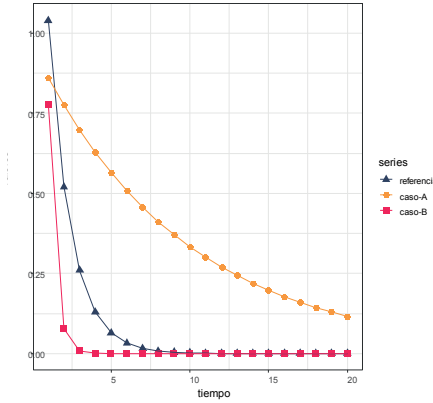
Sin embargo, no se puede pasar por alto la dependencia de la trayectoria dinámica de las variables a ciertas características económicas. Por ejemplo, es imperioso considerar (i) el grado de persistencia de los diferentes choques, además de (ii) la actitud del banco central respecto a sus objetivos de política monetaria. La persistencia es una medida de la importancia de los choques antiguos en el valor presente de los diferentes disturbios. Por otro lado, los bancos centrales podrían estar más preocupados por la estabilidad de precios (por ejemplo, el Banco Central Europeo) o la estabilidad de la producción (por ejemplo, la Reserva Federal de Estados Unidos). En lo que sigue, nos limitaremos a analizar las simulaciones numéricas de las funciones impulso-respuesta que resultan de los diferentes disturbios (choques de demanda-oferta agregada y tasas de interés) y asociadas a las dos características formuladas.

3.2 Simulación para ‘Alta y Baja Persistencia’

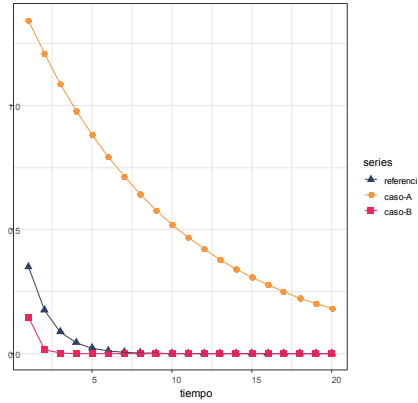
Las gráficas 4 y 5 muestran los efectos de un *shock* exógeno positivo de 1% en la demanda agregada. Como predice la teoría, la expansión económica está acompañado por un proceso inflacionario. La economía se ajusta gradualmente, pero el tiempo necesario para retornar a la senda de estado estacionario depende del grado de persistencia. Esto es, mientras mayor sea el grado de persistencia, más tiempo se requiere para que el banco central estabilice la producción y la inflación. En contraste, si el *shock* de demanda agregada se asemeja a un ruido blanco porque el grado de persistencia es casi nulo, la brecha económica y la inflación requieren relativamente menos tiempo para regresar al estado estacionario.

Las gráficas 6 y 7 muestran una historia similar desde la perspectiva de un choque negativo exógeno de 1% en la oferta agregada (choque de inflación de costos). Otra vez, mientras mayor sea el grado de persistencia en el choque de oferta agregada, mayor es el tiempo necesario para estabilizar la producción y la inflación. Además, mientras más grande sea el grado de persistencia en el choque de oferta agregada, mayor es la magnitud de recesión económica y peor la tasa de inflación.

GRÁFICA 4. UN SHOCK POSITIVO EN LA DEMANDA DE 1%. EFECTOS EN LA BRECHA ECONÓMICA



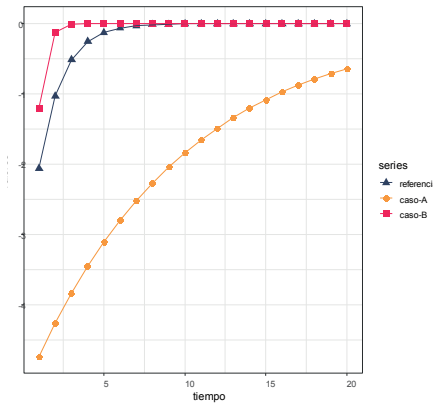
GRÁFICA 5. UN SHOCK POSITIVO EN LA DEMANDA DE 1%. EFECTOS EN LA INFLACIÓN



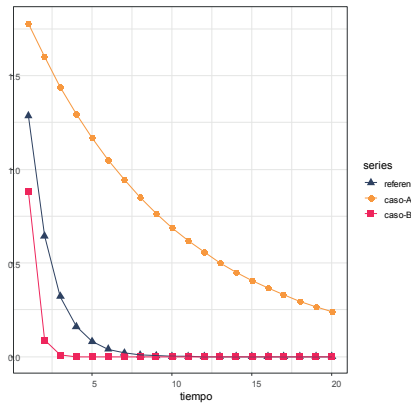
Fuente: Elaboración propia.

Nota. Los valores de referencia son , los valores de ‘alta persistencia’ (Caso-A) son y los valores de ‘baja de persistencia’ (Caso-B) son . El resto de los parámetros permanece igual.

GRÁFICA 6. UN SHOCK NEGATIVO EN LA DEMANDA DE 1%. EFECTOS EN LA BRECHA ECONÓMICA



GRÁFICA 7. UN SHOCK NEGATIVO EN LA DEMANDA DE 1%. EFECTOS EN LA INFLACIÓN

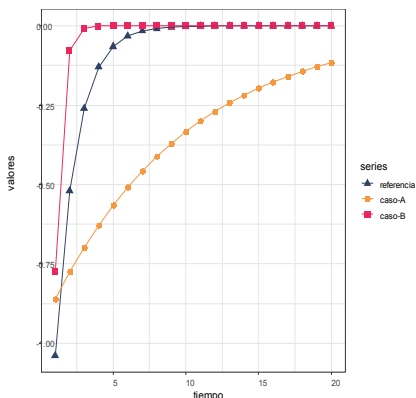


Fuente: elaboración propia.

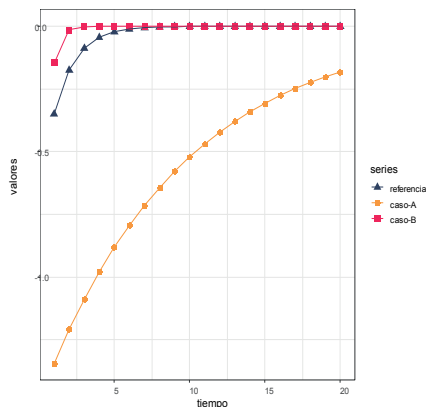
Nota. Los valores de referencia son , los valores de ‘alta persistencia’ (caso-A) son y los valores de ‘baja persistencia’ (caso-B) son . El resto de los parámetros permanece igual.

Las gráficas 8 y 9 muestran los efectos de un mayor grado de persistencia en el choque financiero (choque positivo en la tasa de interés). Si bien la recesión económica inicial que resulta es de menor cuantía respecto a la referencia, no es igual en el caso de la tasa de inflación, ya que cuanto más grande es el grado de persistencia, mayor es la deflación inicial. Por otra parte, de nuevo las funciones impulso-respuesta muestran que mientras mayor sea el grado de persistencia del choque financiero, mayor es el tiempo que el banco central necesita para estabilizar la recesión económica y la deflación de precios.

GRÁFICA 8. UN SHOCK POSITIVO EN LA TASA DE INTERÉS DE 1%. EFECTOS EN LA BRECHA ECONÓMICA



GRÁFICA 9. UN SHOCK POSITIVO EN LA TASA DE INTERÉS DE 1%. EFECTOS EN LA INFLACIÓN



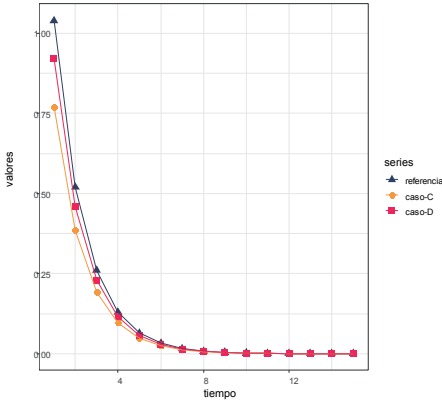
Fuente: Elaboración propia.

Nota. Los valores de referencia son -1.00 , los valores ‘alta persistencia’ (caso-A) son -0.85 y los valores de ‘baja persistencia’ (caso-B) son -0.75 . El resto de los parámetros permanece igual.

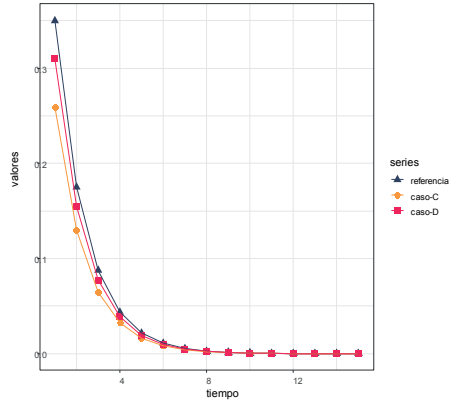
3.3 Simulación para los ‘Casos banco central halcón y paloma’

Las gráficas 10 y 11 muestran una historia diferente. El problema aquí no es el grado de persistencia, sino la posición y actitud del banco central respecto a sus objetivos de política económica. El banco central podría favorecer la inflación (halcón) o la producción (paloma). Si la autoridad monetaria está más preocupada por estabilizar la inflación, mayor es su capacidad para amortiguar los efectos iniciales en la producción y la tasa de inflación de un choque exógeno de 1% en la demanda agregada. Los efectos inmediatos en la producción y la inflación no sólo son de menor cuantía, sino que el tiempo necesario para estabilizarlos es mucho menor.

GRÁFICA 10. UN SHOCK POSITIVO EN LA DEMANDA DE 1%. EFECTOS EN LA BRECHA ECONÓMICA



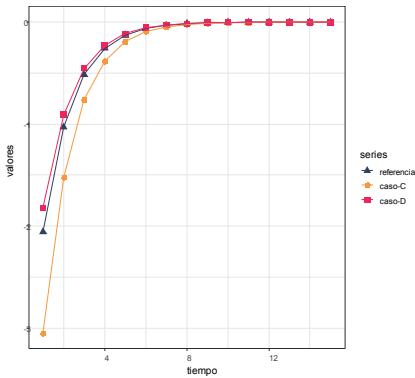
GRÁFICA 11. UN SHOCK POSITIVO EN LA DEMANDA DE 1%. EFECTOS EN LA INFLACIÓN



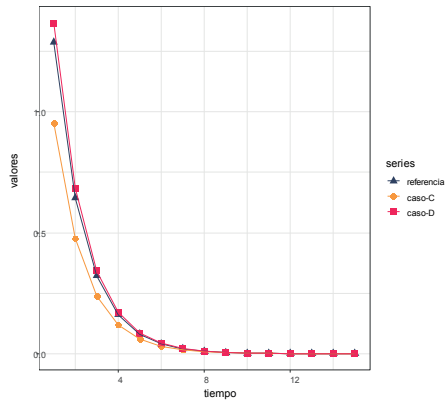
Fuente: Elaboración propia.

Nota. Los valores de referencia son , los valores de un ‘halcón’ (caso-C) son y los valores de una ‘paloma’ (caso-D) son . El resto de los parámetros permanece igual.

GRÁFICA 12. UN SHOCK NEGATIVO EN LA OFERTA DE 1%. EFECTOS EN LA BRECHA ECONÓMICA



GRÁFICA 13. UN SHOCK NEGATIVO EN LA OFERTA DE 1%. EFECTOS EN LA INFLACIÓN



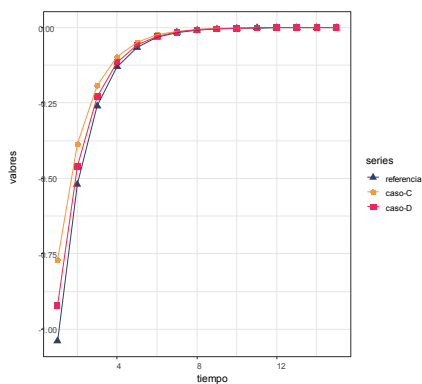
Fuente: Elaboración propia.

Nota. Los valores de referencia son , los valores de un ‘halcón’ (caso-C) son y los valores de una ‘paloma’ (caso-D) son . El resto de los parámetros permanece igual.

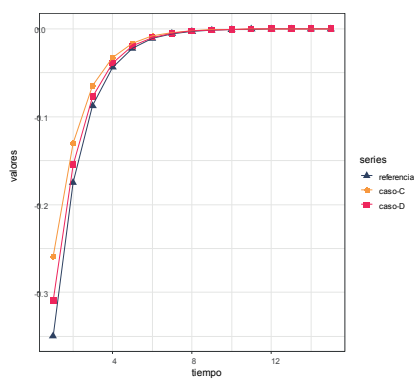
Las gráficas 12 y 13 ilustran los efectos de un choque negativo de 1% en la oferta agregada. Tanto mayor sea el grado de defensa de la tasa de inflación que la producción, mayor es la recesión económica y menor es la tasa de inflación inicial. En efecto, menor es la recesión económica y mayor la tasa de inflación mientras mayor vigilancia se le otorgue al objetivo de producción-empleo. En cualquier caso, la estabilización de las variables exige alrededor de unas 8 unidades de tiempo. Las dificultades para amortiguar a las variables implicadas además dependen directamente del proceso correspondiente.

En las gráficas 14 y 15 tenemos una situación similar en la medida que el banco central está más preocupado por la inflación que por la producción. Las simulaciones muestran, empero, que la postura de un ‘banco central halcón’ es superior respecto a un ‘banco central paloma’. La superioridad es inteligible en términos de los efectos adversos en la producción e inflación de un choque financiero exógeno de 1% en la tasa de interés.

GRÁFICA 14. UN SHOCK POSITIVO EN LA TASA DE INTERÉS DE 1%. EFECTOS EN LA BRECHA ECONÓMICA



GRÁFICA 15. UN SHOCK POSITIVO EN LA TASA DE INTERÉS DE 1%. EFECTOS EN LA INFLACIÓN



Fuente: Elaboración propia.

Nota. Los valores de referencia son $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = 0.5/4$, los valores de un ‘halcón’ (caso-C) son $\bar{\theta}_1 = 2.5, \bar{\theta}_2 = 0.5/4$ y los valores de una ‘paloma’ (caso-D) son $\hat{\theta}_1 = 1.5, \hat{\theta}_2 = 1/4$. El resto de los parámetros permanece igual.

Las simulaciones numéricas de las funciones impulso-respuesta son posibles en tanto los parámetros calibrados cumplen con la condición Blanchard-Kahn. Es decir,

podríamos realizar más simulaciones numéricas, pero los resultados difícilmente serán opuestos, a no ser que haya más o menos variables de control que valores propios fuera del círculo unitario.

Comentarios finales

La macroeconomía computacional en el futuro cercano se impregnará en la enseñanza de la macroeconomía. La solución de los modelos lineales de expectativas racionales es una parte integral de la macroeconomía moderna. En la mayoría de los modelos estocásticos no es posible deducir una solución analítica, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos. En los últimos tiempos, hemos comprendido el alcance de los métodos Blanchard-Kahn (1980) y Klein (2000) para el pronóstico y evaluación las políticas económicas. Estos métodos numéricos se aplican rutinariamente en una vasta cantidad de modelos lineales de expectativas racionales. Consecuentemente, es imperioso conocer la implementación computacional de estos sistemas para simular las trayectorias temporales de las principales variables macroeconómicas. Los cálculos numéricos no se pueden realizar a mano; es necesario un ordenador y escribir una secuencia de instrucciones para computar en unos cuantos segundos, incluyendo la elaboración de las gráficas. De esta suerte, es altamente recomendable el manejo de paquetería computacional a fin de ganar intuición en aquellos modelos económicos dotados de términos de expectativas racionales.

El modelo macroeconómico nekeynesiano tiene como propósito explicar el comportamiento de una economía estocástica, sobre todo si ésta experimenta efectos de innovaciones recurrentes, como *shocks* exógenos de demanda y oferta agregada y turbulencias financieras. La ilustración de este artículo muestra el alcance práctico del método de descomposición de Schur para la solución numérica de los modelos lineales de expectativas racionales. Las simulaciones numéricas de las funciones impulso-respuesta esclarecen no solo la capacidad de predicción dinámica, sino también su utilidad en el proceso de evaluación de la política económica.

En relación con las simulaciones numéricas de las funciones impulso-respuesta para el modelo nekeynesiano, destacamos implicaciones para el proceso de conducción de la política monetaria bajo incertidumbre. Las propiedades y los resultados están diseminados en la teoría económica, pero las simulaciones numéricas despuntan dos proposiciones principales: (i) cuanto mayor sea el grado

de persistencia de los diferentes *shocks* exógenos, mayor es el tiempo necesario para lograr la estabilización de la producción y la inflación, y (ii) mientras mayor sea el compromiso de la autoridad monetaria por un objetivo de inflación, menores son los efectos adversos en la economía; es decir, la economía estará mejor blindada a los embates exógenos (*shocks* de demanda y oferta agregadas), sobre todo si proceden del ámbito financiero.

En consecuencia, la observación de que los bancos centrales deberían preocuparse más por aspectos de empleo-producción no tiene mucho sustento, al menos en los resultados de nuestras simulaciones numéricas. La posición anterior es independiente del grado de persistencia de los *shocks* exógenos de demanda y oferta agregada. Los efectos de las turbulencias financieras son más adversos en proporción al grado de persistencia en los disturbios reales. Además, los efectos desaparecen sólo progresivamente a medida que el tiempo transite; por tanto, es mejor una estrategia que minimice el proceso de transición.

Estas proposiciones, por supuesto, necesitan revisarse al considerar otras características de la economía. Una reflexión adicional necesita contemplar aspectos inerciales de algunas variables importantes. Es decir, el futuro es importante, pero el pasado también influye en el presente y el futuro, de manera que los preceptos de la teoría macroeconómica necesitan revisarse en términos de los avances en el pensamiento dominante. Por ejemplo, el método de solución numérica se puede aplicar a un modelo lineal de expectativas racionales caracterizado por una curva de Phillips híbrida, en el que se incluyen simultáneamente expectativas racionales (*forward-looking*) y expectativas estáticas (*backward-looking*). Así que basta con considerar una variante de esta reflexión para tener una agenda de investigación en diversas direcciones.

Referencias bibliográficas

- Blanchard, O. J. & Kahn, C. M. (1980). The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica*, 48(5), 1305-1311. <<https://doi.org/10.2307/2F1912186>>.
- Buiter, W. (1982). Predetermined and Non-predetermined Variables in Rational Expectations Models. *Economics Letters*, 10(1-2), 49-54. <<http://dx.doi.org/10.2307/1912186>>.

- Clarida, R., Galí, J. & Gertler, M. (1999). The Science of Monetary Policy: a New Keynesian Perspective, *Journal of Economic Literature*, 37, 1661-1707. <<http://dx.doi.org/10.1257/jel.37.4.1661>>.
- Clarida, R., Galí, J. & Gertler, M. (2000). Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability: Evidence and Some Theory. *Quarterly Journal of Economics*, 105, 147-180. <<https://doi.org/10.1162/003355300554692>>.
- Klein, P. (2000). Using the Generalized Schur form to solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 24, 1405-1423. <[http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889\(99\)00045-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-1889(99)00045-7)>.
- Galí, J. (2015). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: an Introduction to the New Keynesian Framework*. 2nd Edition. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Snowdon, B. & Vane, H. (2005). *Modern Macroeconomics: Its Origins, Development and Current State*. UK: Edward Elgar.
- Taylor, J. B. (1993). Discretion Versus Policy Rules in Practice. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 39:195-214. <[https://doi.org/10.1016/0167-2231\(93\)90009-L](https://doi.org/10.1016/0167-2231(93)90009-L)>.
- Poutineau, J.C. Sobczak, K & Vermandel G. (2015). The Analytics of the New Keynesian 3-equation Model. *Economics and Business Economics and Business Review*, 15(2): 110-129. <<https://doi.org/10.18559/ebr.2015.2.6>>.
- Walsh, C. (2010). *Monetary Policy and Theory*, 3rd Edition. Cambridge, MA: MIT Press.
- Wickens, M. (2012). *Macroeconomic Theory: a Dynamic General Equilibrium Approach*. 2nd Edition. Princeton University Press.

SUPLEMENTO⁹

El método estándar de la macroeconomía moderna: la descomposición de Schur

La solución numérica del sistema lineal de expectativas racionales procede con la descomposición de Schur de las matrices A_0 y A_1 de la ecuación matricial enunciada enseguida.

⁹ La exposición de este suplemento se basa principalmente en Blanchard-Kahn (1988) y Klein (2000). Sin embargo, los interesados en el tema podrían consultar entre otros el libro de Wikens *Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach* (2012).

$$A_0 \begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ E_t x_{t+1}^2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} + A_2 \epsilon_{t+1} \quad (\text{S.1})$$

Siguiendo a Klein (2000: 1410), recurrimos al siguiente teorema.

Teorema de Schur. Dado dos matrices A_0 y A_1 reales de $n \times n$, existen matrices unitarias ortogonales Q y Z , tal que cada matriz $Q^T A_0 Z$ y $Q^T A_1 Z$ es triangular superior

$$Q^T A_0 Z = S \quad (\text{S.2})$$

$$Q^T A_1 Z = T \quad (\text{S.3})$$

Se dice que el par de matrices (S, T) tienen la forma de Schur real generalizada. Con la ayuda de este teorema, podemos realizar transformaciones a las variables originales.

$$Z w_{t+1} = x_{t+1} \quad (\text{S.4})$$

$$Z w_t = x_t \quad (\text{S.5})$$

Sustituyendo (S.4) y (S.5) en (S.1), multiplicando por Q^T y luego utilizando (S.2) y (S.3), tenemos

$$A_0 Z w_{t+1} = A_1 Z w_t + A_2 \epsilon_{t+1} \quad (\text{S.6})$$

$$Q^T A_0 Z w_{t+1} = Q^T A_1 Z w_t + Q^T A_2 \epsilon_{t+1} \quad (\text{S.7})$$

$$S w_{t+1} = T w_t + D \epsilon_t \quad (\text{S.8})$$

donde,

$$w_{t+1} = \begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix}, w_t = \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix}, D = Q^T A_2$$

Los valores propios del sistema están en la diagonal de la matriz $S^{-1}T$, esto es

$$\lambda(A_0, A_1) = \frac{T(i, i)}{S(i, i)} \quad (\text{S.9})$$

donde $S(i,i)$ y $T(i,i)$ son los elementos de la diagonal principal de las matrices S y T , respectivamente. Además, podemos establecer dos grupos de valores propios de manera que, en uno de ellos, estén los valores propios con módulo inferior a la unidad, y en el otro los de módulo superior a la unidad.

Dicho lo anterior, recurrimos al corolario Blanchard-Khan (1980: 1308).

Corolario Blanchard-Khan. El sistema lineal de expectativas racionales (S.1) tiene una solución única estable (no-explosiva), si el número de valores propios con módulo superior a la unidad es igual al número de variables de control. Si el número de valores propios con módulo superior a la unidad excede el número de variables de control, no existe solución. Si el número de valores propios con módulo superior a la unidad es menor a la cantidad de variables de control, hay infinitas soluciones.

En la suposición de que es posible la ordenación de los valores propios, procedemos a considerar la transformación del sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \quad (\text{S.10})$$

Al multiplicar por la inversa de la matriz, tenemos:¹⁰

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11}^{-1} & -(S_{11}S_{22})^{-1}S_{12} \\ 0 & S_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} S_{11}^{-1} & -(S_{11}S_{22})^{-1}S_{12} \\ 0 & S_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (\text{S.11})$$

Al manipular obtenemos

¹⁰ En los cálculos de la inversa se puede verificar el cumplimiento de la siguiente expresión:

$$S_{11}^{-1}S_{12} - (S_{11}S_{22})^{-1}S_{12}S_{22} = S_{11}^{-1}S_{12} - S_{11}^{-1}S_{22}^{-1}S_{12}S_{22} = S_{11}^{-1}S_{12} - S_{11}^{-1}S_{12}S_{22}^{-1}S_{22} = 0$$

En relación con el modelo nekeynesiano, S_{11} es una matriz (3 × 3), S_{22} es una matriz (2 × 2), S_{12} es una matriz (3 × 2). Estas anotaciones aplican también a las particiones T_{11} , T_{12} y T_{22} , respectivamente.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11}^{-1}T_{11} & S_{11}^{-1}T_{12} - (S_{11}S_{22})^{-1}S_{12}T_{22} \\ 0 & S_{22}^{-1}T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} S_{11}^{-1}D_1 - (S_{11}S_{22})^{-1}S_{12}D_2 \\ S_{22}^{-1}D_2 \end{bmatrix} \epsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (\text{S.12})$$

Por tanto, existe una solución si las entradas $S_{11}^{-1}T_{11}$ y $S_{22}^{-1}T_{22}$ contienen a los valores propios de módulo inferior y superior a la unidad, respectivamente. Además, también es posible ‘desacoplar’ la dinámica de las variables de control conectada a los valores propios inestables (superiores a la unidad) y las variables de estado asociada con los valores propios estables (inferiores a la unidad).

En lo que sigue, mostraremos que la solución de las variables de control se obtiene por iteración hacia adelante y la solución de las variables de estado se consigue por iteración hacia atrás.

En primer lugar, consideremos en el ‘bloque inferior’ de la ecuación (S.12). A este respecto, podemos realizar algunas manipulaciones algebraicas.

$$S_{22}^{-1}T_{22}u_t + S_{22}^{-1}D_2\epsilon_{t+1} = u_{t+1} \quad (\text{S.13})$$

$$S_{22}^{-1}T_{22}u_t = u_{t+1} - S_{22}^{-1}D_2\epsilon_{t+1} \quad (\text{S.14})$$

$$T_{22}u_t = S_{22}u_{t+1} - D_2\epsilon_{t+1} \quad (\text{S.15})$$

$$u_t = T_{22}^{-1}S_{22}u_{t+1} - T_{22}^{-1}D_2\epsilon_{t+1} \quad (\text{S.16})$$

Ahora, la ecuación (S.16) se itera hacia adelante para alcanzar

$$\begin{aligned} u_t &= (T_{22}^{-1}S_{22})^4 u_{t+4} \\ &- T_{22}^{-1}[(S_{22}T_{22}^{-1})^3 D_2 \epsilon_{t+4} + (S_{22}T_{22}^{-1})^2 D_2 \epsilon_{t+3} \\ &+ (S_{22}T_{22}^{-1})D_2 \epsilon_{t+2} + D_2 \epsilon_{t+1}] \end{aligned} \quad (\text{S.17})$$

Como el $\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{22}^{-1}S_{22})^k = 0$, obtenemos una solución para la transformación de las variables de control.

$$u_t = -T_{22}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (S_{22}T_{22}^{-1})^k D_2 \epsilon_{t+k+1} \quad (\text{S.18})$$

Si no se espera ningún disturbio futuro después del periodo $t+1$, es decir $\epsilon_{t+k} = 0$, para toda $k > 1$, la ecuación anterior entonces se reduce a

$$u_t = -T_{22}^{-1}D_2\epsilon_{t+1} \quad (S.19)$$

Este resultado es útil en la solución de las variables originales. En consecuencia, ahora analicemos el ‘bloque superior’ de la ecuación (S.12), el cual se acomoda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= S_{11}^{-1}T_{11}s_t + [S_{11}^{-1}T_{12} - (S_{11}S_{22})^{-1}S_{12}T_{22}]u_t \\ &+ [S_{11}^{-1}D_1 - (S_{11}S_{22})^{-1}S_{12}D_2]\epsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (S.20)$$

Al sustituir (S.19) en (S.20) obtenemos

$$s_{t+1} = S_{11}^{-1}T_{11}s_t + [S_{11}^{-1}D_1 - S_{11}^{-1}T_{12}T_{22}^{-1}D_2]\epsilon_{t+1} \quad (S.21)$$

La expresión anterior es una ecuación en diferencias estocástica de primer orden. De esta manera, podemos describir la dinámica de las variables de estado, aunque nos gustaría ir más allá de la transformación y regresar a los valores originales.

Con este último propósito, consideramos las implicaciones de las ecuaciones (S.4) y (S.5), respectivamente.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t+1} \\ u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ x_{t+1}^2 \end{bmatrix} \quad (S.22)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} \quad (S.23)$$

De esta manera, en los periodos t y $t+1$, el valor de la variable predeterminada se relaciona con $s_t, u_t, s_{t+1}, u_{t+1}$.

$$x_t^1 = Z_{11}s_t + Z_{12}u_t \quad (S.24)$$

$$x_{t+1}^1 = Z_{11}s_{t+1} + Z_{12}u_{t+1} \quad (S.25)$$

Como $\epsilon_{t+k} = 0$ para toda $k > 1$, entonces estas dos ecuaciones se reducen a

$$s_t = Z_{11}^{-1}x_t^1 + Z_{11}^{-1}Z_{12}T_{22}^{-1}D_2\epsilon_{t+1} \quad (\text{S.26})$$

$$s_{t+1} = Z_{11}^{-1}x_{t+1}^1 \quad (\text{S.27})$$

Reemplazando estas dos ecuaciones en (S.21) obtenemos

$$x_{t+1}^1 = Fx_t^1 + G\epsilon_{t+1} \quad (\text{S.28})$$

donde,

$$F = Z_{11}S_{11}^{-1}T_{11}Z_{11}^{-1}$$

$$G = Z_{11}S_{11}^{-1}D_1 + (Z_{11}S_{11}^{-1}T_{11}Z_{11}^{-1}Z_{12}T_{22}^{-1} - Z_{11}S_{11}^{-1}T_{12}T_{22}^{-1})D_2$$

Por último, consideremos la definición de las variables de control a través de la ecuación (S.23), esto es

$$x_t^2 = Z_{21}s_t + Z_{22}u_t \quad (\text{S.29})$$

Ahora podemos sustituir (S.19) y (S.26) en la ecuación anterior para encontrar el resultado

$$x_t^2 = Mx_t^1 + N\epsilon_{t+1} \quad (\text{S.30})$$

donde,

$$M = Z_{21}Z_{11}^{-1}$$

$$N = Z_{21}Z_{11}^{-1}Z_{12}T_{22}^{-1}D_2 - Z_{22}T_{22}^{-1}D_2$$

De esta manera, tenemos una solución para las variables de estado y de control originales. La primera se manifiesta en la ecuación (S.28) y la segunda está plasmada en la ecuación (S.30).

Por último, es recomendable la deducción de las funciones impulso-respuesta para cada tipo de variables. A este respecto, consideremos posibles cambios en las variables exógenas a lo largo de un número de periodos. En el caso de las variables de estado tenemos

$$\begin{aligned}
 x_1^1 &= Fx_0^1 + G\epsilon_1 \\
 x_2^1 &= Fx_1^1 + G\epsilon_2 = F(Fx_0^1 + G\epsilon_1) + G\epsilon_2 = F^2x_0^1 + FG\epsilon_1 + G\epsilon_2 \\
 x_3^1 &= Fx_2^1 + G\epsilon_3 = F(F^2x_0^1 + FG\epsilon_1 + G\epsilon_2) + G\epsilon_3 = F^3x_0^1 + F^2G\epsilon_1 + FG\epsilon_2 + G\epsilon_3 \\
 &\vdots \\
 x_t^1 &= F^t x_0^1 + F^{t-1}G\epsilon_1 + F^{t-2}G\epsilon_2 + \dots + F^2G\epsilon_{t-2} + FG\epsilon_{t-1} + G\epsilon_t
 \end{aligned}$$

Igualmente, en el caso de las variables de control tenemos

$$\begin{aligned}
 x_1^2 &= Mx_1^1 + N\epsilon_2 = M(Fx_0^1 + G\epsilon_1) + N\epsilon_2 = MFx_0^1 + MG\epsilon_1 + N\epsilon_2 \\
 x_2^2 &= Mx_2^1 + N\epsilon_3 = M(F^2x_0^1 + FG\epsilon_1 + G\epsilon_2) + N\epsilon_3 = MF^2x_0^1 + MFG\epsilon_1 + MG\epsilon_2 + N\epsilon_3 \\
 x_3^2 &= Mx_3^1 + N\epsilon_4 = M(F^3x_0^1 + F^2G\epsilon_1 + FG\epsilon_2 + G\epsilon_3) + N\epsilon_4 = MF^3x_0^1 + MF^2G\epsilon_1 + MFG\epsilon_2 + MG\epsilon_3 + N\epsilon_4 \\
 &\vdots \\
 x_t^2 &= MF^t x_0^1 + MF^{t-1}G\epsilon_1 + \dots + MF^2G\epsilon_{t-2} + MFG\epsilon_{t-1} + MG\epsilon_t + N\epsilon_t
 \end{aligned}$$

En consecuencia, los valores de la función impulso-respuesta que resultan de un cambio en el vector de variables exógenas durante el primer periodo son los que se describen en el cuadro 6.

CUADRO 6: FUNCIÓN IMPULSO RESPUESTA

Variable	Impacto de un choque en el periodo t	Variable	Impacto de un choque en el periodo t
x_t^1	$G\epsilon_t$	x_t^2	$HG\epsilon_t$
x_{t+1}^1	$FG\epsilon_t$	x_{t+1}^2	$MFG\epsilon_t$
x_{t+2}^1	$F^2G\epsilon_t$	x_{t+2}^2	$MF^2G\epsilon_t$
x_{t+j}^1	$F^{j-1}G\epsilon_t$	x_{t+j}^2	$MF^{j-1}G\epsilon_t$

Fuente: Elaboración propia.

Las funciones calculadas para cada periodo así calculadas se insertan como parte de un programa informático para realizar las simulaciones numéricas que sean necesarias para caracterizar las trayectorias temporales de las variables de control (tasa de inflación y brecha de producto real).